Calcul Moulien

Jacky Cresson

CALCUL MOULIEN

par

Jacky Cresson

Résumé. — Ce texte est une introduction au calcul moulien, développé par Jean Écalle. On donne une définition précise de la notion de moule ainsi que les principales propriétés de ces objets. On interprète les différentes symétries (alterna(e)l,symetra(e)l) des moules via les séries formelles non commutatives assoçiées dans des bigèbres graduées notées $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$, correspodant aux deux types de colois étudiées par Ecalle, à savoir $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ et $\Delta_*(a_i) = \sum_{l+k=i} a_l \otimes a_k$. On illustre en détail l'application de ce formalisme dans le domaine de la recherche des formes normales de champs de vecteurs et difféomorphismes.

***Abstract* (Mould calculus).** — This paper is an introduction to mould calculus, as introduced by Jean Écalle. We give a precise definition of moulds and describe there main properties. We translate mould symmetries (alterna(e)l and symetra(e)l) using non commutative formal power series in two given bialgebras $\mathbb{A}$ and $\mathbb{E}$, corresponding to two coproducts structure given by $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ and $\Delta_*(a_i) = \sum_{l+k=i} a_l \otimes a_k$. We apply this formalism to the problem of normal forms for vector fields and diffeomorphisms.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 17B40-17A50-17B62-17B70.

Table des matières

AVANT-PROPOS SUR LE CALCUL MOULIEN

par Jean Ecalle

Les *moules* sont des objets on ne peut plus concrets et banals : ce sont de simples fonctions d'un "nombre variable de variables" ; ou si l'on préfère, des fonctions définies sur un monoide. Mais là-dessus viennent se greffer :

(i) trois opérations de base, plus une douzaine de secondaires.
(ii) quatre grands types de "symétrie" ou d'"alternance", plus une douzaine de secondaires
(iii) une batterie de règles et recettes simples, qui disent comment telle ou telle opération affecte, conserve, transforme, etc..., telle ou telle propriété
(iv) une transformation de grande portée, l'*arborification* , qui sert surtout à rendre *convergentes* des séries mouliennes divergentes, mais qui possède aussi la propriété inattendue de "respecter" l'expression analytique des principaux moules utiles
(v) et enfin, bien sûr, un bestiaire de quelque trente *moules fondamentaux*, qui surgissent et resurgissent un peu partout, soit directement, soit comme *ingrédients* ou *pièces détachées* à partir desquelles sont construits les *moules secondaires*, eux-mêmes en quantité indéfinie.

Aussi élaboré que puisse paraître cet appareil, il reste malgré tout décidément élémentaire dans ses ressorts. Aussi serait-il trompeur, à mon avis , de parler d'une *théorie des moules.* On serrerait sans doute la vérité de plus près en parlant à leur propos d'un *système de notations* doublé d'un *mode d'emploi sophistiqué*, qui permet souvent de poursuivre les calculs même là où la complexité des expressions à manier semble redhibitoire. On pourrait aussi parler d'un *état d'esprit moulien* : c'est la mentalié de celui qui ne se contente pas de théorèmes généraux d'existence, d'unicité, etc, nous laissant sur notre faim, mais qui délibérément *recherche l'explicite*, car il sait par expérience que c'est presque toujours possible, toujours payant, et souvent indispensable dès qu'on vise des résultats tant soit peu précis. Et l'on pourrait ajouter que les moules s'incrivent dans une démarche *typiquement analytique* : ils permettent en effet de cerner les difficultés, puis de les sérier, puis de les vaincre , en les examinant tour à tour pour les composantes de longueur 1, 2, 3, etc, jusqu'à ce que les mécanismes en jeu se dévoilent et livrent la solution générale.

C'est précisément cette démarche qui a permis, en théorie KAM, de dissiper la chimère des *petits diviseurs surmultiples*, qui n'ont aucune espèce d'existence, mais qui hantaient la théorie depuis son origine.

La même démarche s'applique, avec le même succès, à l'analyse des *objets analytiques locaux* (champs de vecteurs, difféomorphismes, équations ou systèmes différentiels ou fonctionnels ...) et en particulier à l'étude de leurs *invariants holomorphes*. Ces derniers sont souvent réputés "non calculables", alors qu'ils le sont éminemment - grâce aux moules.

Les moules interviennent aussi en théorie de la *résurgence*, où d'ailleurs ils prennent leur origine, car c'est là un contexte typiquement non commutatif, qui à chaque pas requiert des indexations sur le monoide engendré par $\mathbb{C}$.
Il y a aussi tout le champ des *fonctions spéciales* et sa "complétion naturelle", qui est justement le champ des *moules spéciaux*. Expliquons-nous. L'Analyse du 19^{eme} siècle avait pour idéal la résolution explicite des équations (différentielles, etc) au moyen d'un certain nombre de *fonctions spéciales*, répertoriées, décrites et tabulées une fois pour toutes. Mais cela s'est vite révélé impraticable, car aucune collection de fonctions spéciales n'y suffisait. Aussi l'optique a-t-elle changé et, pour la *common wisdom* du 20^{eme} siècle, le 'but' était au contraire de trouver des *algorithmes* de résolution. C'était un progrès, mais un recul aussi : on perdait en transparence ce qu'on gagnait en généralité. Heureusement, les deux choses sont conciliables : si le champ des fonctions spéciales est trop restreint pour "tout exprimer", le champ des moules spéciaux, lui, y suffit - tout en incorporant l'aspect *algorithmique*, vu le mode de définition, par récurrence sur la longueur, de la plupart des moules spéciaux.
Qui dit *fonctions spéciales* dit aussi *constantes trancendantes spéciales* : les deux choses vont de pair. Là aussi, les moules sont l'outil idoine : ils sont le langage préadapté dans lequel se construit et s'étudie le corps dénombrable $\mathbb{N}$a des *naturels*, qui contient (presque) toutes les *constantes transcendantes naturelles* - à commencer par les *multizetas*, pour qui les principales conjectures viennent justement d'être résolues, par une démarche qui, du début à la fin, utilise les notations et les opérations mouliennes.

INTRODUCTION

Les raisons du texte

Toute nouvelle notion, en mathématiques comme ailleurs, est souvent source de difficultés. C'est notamment le cas des *moules* et *comoules* introduits par Jean Ecalle au cours de ses nombreux travaux, aussi bien dans le domaine des formes normales de champs de vecteurs que dans celui de l'étude des singularités, ou plus recemment, des propriétés algébriques des polyzêtas. Par ailleurs, il n'est pas toujours facile de situer ces nouvelles notions et ses éventuelles connexions vis à vis des domaînes mathématiques existant.

Il n'existe pas de texte introductif sur le calcul moulien, facile d'accès, et répondant à ces interrogations. Or, ce travail devient nécessaire du fait de l'utilisation de ce formalismes dans des domaines très différents de son champ d'application initial[(1)]. L'objet de ce texte[(2)] est de combler ce vide. Nous allons définir les moules, et les comoules, et expliciter certaines méthodes associées, comme la méthode d'arborification. Mais surtout, nous allons préciser le cadre théorique de ces objets, à savoir celle de la combinatoire des algèbres de Lie libre et des bigèbres graduées. On verra notamment que certains des mots nouveaux sont en fait connus depuis longtemps sous une autre terminologie, comme par exemple, l'équivalence entre un moule alternal et un élément primitif d'une algèbre de Hopf.

La plupart du temps, le *calcul moulien*[(3)] est perçu comme compliqué et difficile à manier. Cette remarque permet aux spécialistes des divers champs d'applications du calcul moulien de le laisser de côté. Une autre conséquence est que les apports de ce calcul, par exemple dans l'étude des champs de vecteurs et des difféomorphismes, sont souvent mal cernés voir ignorés.

Le but de ce texte est de montrer la simplicité d'usage du calcul moulien, et son apport aussi bien théorique que pratique, dans le problème classique des formes normales de champs de vecteurs, via la démonstration de plusieurs théorèmes connus, notamment

---

[(1)] Je pense ici aux récentes contributions de Jean Ecalle en théorie des nombres sur la combinatoire des polyzêtas.

[(2)] Ce texte est basé sur mon cours de DEA "Calcul moulien et séries formelles non commutatives" donné à l'Université Semlalia de Marrakech en avril 2002, et une série d'exposés intitulés "Calcul moulien et polyzêtas" donnés en Mai 2002 à Paris VI en complément du cours de DEA de Michel Waldschmidt "Valeurs zêtas multiples".

[(3)] Quand il n'est pas vu comme une "théorie" des moules.

celui de Bryuno sur la linéarisation analytique des champs de vecteurs non-résonnants en présence de petits diviseurs.

Bien entendu, les moules permettent *aussi* de démontrer des résultats nouveaux, souvent difficiles d'atteinte pour les méthodes classiques[(4)]. Mais il est plus facile de s'appercevoir de la puissance de ce langage en comparant le degré de compréhesion obtenu en suivant le chemin classique de démonstration d'un théorème bien établi, et l'approche moulienne. Outre un apport conceptuel évident, il améliore la compréhension de résultats existants, au point parfois, de remettre en cause des phénomènes pourtant bien établis[(5)]

La puissance des moules s'illustre aussi par son vaste champ d'applications, notamment :

i - Résurgence (équation du pont),
ii - Équations différentielles (théorie des invariants holomorphes, théorie des formes normales),
iii - Équations aux différences,
iv - Équations fonctionelles,
v - Analyse de Lie,
vi - Théorie des nombres (multizetas symboliques).

J'en oublie surement et je renvoie aux travaux d'Ecalle, notamment son article de revue [**14**] pour plus de détails. Passons maintenant à la présentation standard des moules.

Présentation standard des moules

La présentation des moules qui va suivre est essentiellement celle donnée par Ecalle dans ses articles comme "rappels" sur les moules.

Soit Ω un semigroupe additif. On note Ω^* l'ensemble des suites construites sur Ω. Un éléments de Ω^* sera noté $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ avec $\omega_i \in \Omega$ pour tout i. La longueur d'une suite $\underline{\omega}$ se note $l(\underline{\omega}) = n$. On indicera les éléments de Ω^* sous la forme $\underline{\omega}^i$, et ses composantes comme $\underline{\omega}^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_n^i)$. On note $\underline{\omega}^1 \bullet \underline{\omega}^2$ la suite obtenue par *concaténation*

[(4)] Par exemple, la démonstration de l'analyticité de la correction dans [**15**] pour un champ de vecteur quelconque, qui correspond dans le cas hamiltonien à la conjecture de Gallavotti.
[(5)] C'est le cas de l'étude de la convergence de la *correction*, introduite par J. Ecalle et B. Vallet [**15**], qui met en évidence un phénomène *purement algébrique* de suppression des *petits diviseurs surmultiples*. Or, ces derniers apparaîssent dans les manipulations classiques [**18**], et la convergence de la série se démontre alors au prix d'estimations très fines, connues sous le nom de *compensation d'Eliasson*.

des suites $\underline{\omega}^1$ et $\underline{\omega}^2$ (ou $\underline{\omega}^1\underline{\omega}^2$ si aucune confusion n'est possible).

La plupart des textes sur le calcul moulien donne la "définition" suivante : *les moules sont des fonctions à un nombre variable de variables.* L'avantage de cette pseudo définition est qu'elle est "parlante", et que l'on devine assez bien ce qui se cache sous ce type d'objet. Dans la suite, nous adopterons la définition suivante :

Définition .1. — *Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif. On appelle moule une application de Ω^* dans $\mathbb{K}$, i.e.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^* & \xrightarrow{M} & \mathbb{K} \\ \underline{\omega} & \mapsto & M(\underline{\omega}). \end{array}$$

On notera un moule $M^\bullet$ et son évalutation sur une suite $\underline{\omega}$ par $M^{\underline{\omega}}$.

Cette notation pose de nombreux problèmes et peut préter à confusion[6]. Néanmoins, afin de faciliter la lecture des textes d'Ecalle par la suite et de permettre une comparaison, nous allons conserver cette notation.

Les différentes propriétés des moules (alterna(e)lité, symétra(e)lité) proviennent de la contraction avec des *opérateurs non commutatifs* vérifiants certaines *colois spécifiques.* Ces opérateurs interviennent naturellement dans l'étude des champs de vecteurs et difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}^\nu$.

Définition .2. — *Soit A une algèbre sur un corps de caractéristique zéro $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B}$ une algèbre d'opérateurs sur A, non commutatifs, munie de la composition (usuelle). On appelle comoule une application de Ω^* dans $\mathcal{B}$. On note*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^* & \xrightarrow{B} & \mathcal{B} \\ \underline{\omega} & \mapsto & B_{\underline{\omega}} = B_{\omega_n}\dots B_{\omega_1}. \end{array} \tag{.1}$$

On notera un comoule $B_\bullet$.

Ces algèbres seront toujours munies d'une coloi $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}$, application linéaire, compatible avec la loi de composition sur $\mathcal{B}$. Dans ce cas, $(\mathcal{B}, \Delta)$ forme une *bigèbre* au sens de Bourbaki ([**1**]). Écalle considère deux types de colois qui sont :

i - $\Delta\ :\ B_\omega \to B_\omega \otimes 1 + 1 \otimes B_\omega$,

[6] On peut néanmoins lui trouver une justification par la suite dans la relative simplicité qu'elle induit sur les manipulations algébriques effectives des moules.

ii - $\Delta_*\ :\ B_\omega \to \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} B_{\omega_1}\otimes B_{\omega_2}$[7].

Le cas i) correspond aux algèbres de dérivations sur A et ii) généralise l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre $p\geq 1$.

L'objet "contracté" d'un moule et d'un comoule se note $P_M=\sum_\bullet M^\bullet B_\bullet$, étant entendu que la somme est faite sur toutes les suites possibles de Ω^*.

Deux questions se posent naturellement[8] dans ce cadre :

i) P_M est-il un élément *primitif*, i.e. $\Delta(P_M)=P_M\otimes 1+1\otimes P_M$ (même chose avec Δ_*) ?

ii) P_M est-il un élément *group-like*[9], i.e. $\Delta(P_M)=P_M\otimes P_M$ (même chose avec Δ_*) ?

Cette information est toute entière contenue dans les propriétés algébriques du moule $M^\bullet$. Autrement dit, les propriétés du moule dictent la nature de l'objet formel associé[10]. Dans le cas ou les comoules appartiennent à une algèbre de dérivation, on obtient les éléments primitifs si le moule est *alternal* et les éléments "group-like" si le moule est *symétral*. Si les comoules proviennent d'un opérateur de coloi ii), alors on a un élément primitif si le moule est *alternel* et "group-like" si le moule est *symétrel*.

On note $M(\Omega)$ l'ensemble des moules sur Ω, $M_{alta}(\Omega)$ (resp. $M_{alte}(\Omega)$) l'ensemble des moules alternals (resp. alternels) et $M_{syma}(\Omega)$ (resp. $M_{syme}(\Omega)$) l'ensemble des moules symétrals (resp. symétrels). Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcl}
M^\bullet \in M_{alta}(\Omega) & \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} & N^\bullet \in M_{syma}(\Omega) \\
\Phi\ \downarrow & & \\
M^\bullet \in M_{alte}(\Omega) & \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} & N^\bullet \in M_{syme}(\Omega).
\end{array}$$

Les différentes opérations sur les moules, notamment les opérations d'addition, multiplication et composition, se déduisent des opérations correspondantes sur les opérateurs

(7) Dans ce cas, l'alphabet Ω doit posséder une structure de semi-groupe pour donner un sens à $\omega_1+\omega_2$.
(8) Le naturel dont il est question ici peut prendre deux formes, suivant l'intérêt du lecteur :
- soit au niveau des applications, en montrant que la recherche des éléments primitifs et group-like est indispensable. C'est ce qui est fait dans le dernier chapitre sur les formes normales de champs de vecteurs et difféomorphismes.
- soit au niveau algébrique, ou ces deux notions correspondent aux dérivations et automorphismes de l'algèbre sous-jacente, ce qui est détaillé dans la partie 2.
(9) On trouve aussi la terminologie moins courante d'élément *diagonal*.
(10) La terminologie de moule correspond bien à cette idée.

formels associés. On démontre ainsi que $M_{alta(e)}$ muni de la composition et $M_{sima(e)}$ muni de la multiplication sont des groupes.

Jean Écalle dégage donc de ces questions, une algèbre, appelée *algèbre des moules*, et qui, suivant les remarques précédentes, interviendra dans toutes les questions d'ordre *constructif* sur les bigèbres graduées $(\mathcal{B}, \Delta)$ et $(\mathcal{B}, \Delta_*)$. L'algèbre des moules que nous présentons formellement ici, sera détaillée et explicitée dans le reste du texte.

Algèbre des moules. *Soit $M(\Omega)$ l'ensemble des moules définis sur Ω, muni des opérations*

i) addition : $A^\bullet = M^\bullet + N^\bullet \equiv A^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}} + N^{\underline{\omega}}$,

ii) multiplication : $A^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet \equiv A^{\underline{\omega}} = \sum_{\underline{\omega}^1 \bullet \underline{\omega}^2 = \underline{\omega}} N^{\underline{\omega}^1} M^{\underline{\omega}^2}$,

forme une algèbre non commutative.

Si Ω a une structure de semigroupe, l'algèbre des moules, peut être munie d'une loi de composition, notée $\circ$, compatible avec les lois $+$ et $\times$, et définie par

iii) composition : $A^\bullet = M^\bullet \circ N^\bullet \equiv A^{\underline{\omega}} = \sum_{s \geq 0, \omega^1 \ldots \omega^s = \omega} M^{\|\omega^1\|, \ldots, \|\omega^s\|} N^{\omega^1} \ldots N^{\omega^s}$, *où* $\| \underline{\omega} \| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

L'algèbre des moules muni des opérations $(+, \times, \circ)$ est une algèbre à composition.

Par ailleurs, on a les résultats de stabilité suivants sur les moules :

Propriétés de stabilité des moules. *On note $S^{a(e)l}$ un moule symétra(e)l et $A^{a(e)l}$ un moule alterna(e)l. On a :*

i) $S^{a(e)l} \times S^{a(e)l} = S^{a(e)l}$,

ii) $(S^{a(e)l})^{-1} \times A^{a(e)l} \times S^{a(e)l} = A^{a(e)l}$, *iii)* $A^{a(e)l} \circ A^{a(e)l} = A^{a(e)l}$.

Il y a d'autres propriétés qui seront détaillées par la suite.

Plan du mémoire

Ce mémoire est constitué de 5 parties.

La partie 1 consiste en quelques rappels de la théorie des algèbres de lie, des algèbres enveloppantes d'algèbres de lie, et les notions importantes de cogèbres et bigèbres, qui seront au coeur de ce travail.

La partie 2 est entièrement consacrée au calcul moulien, i.e. à la combinatoire de deux bigèbres, notées $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$, qui interviennent dans tous les travaux d'Ecalle. On en donne deux sources naturelles, à savoir les dérivations sur une algèbre, et les opérateurs différentiels. On y définit aussi les principales symétries des moules, et leurs traductions dans la terminologie des algèbres de lie libres.

La partie 3 introduit l'opération de *composition* des moules, qui est l'analogue non commutatif de la substitution des séries formelles. On décrit en détail la structure d'*algèbre à composition* ainsi obtenue, ainsi que diverses structures associées, comme les groupes alerna(e)ls et symetra(e)ls.

La partie 4, qui peut être omise dans une première lecture, traîte de questions théoriques sur les moules. On donne une interprétation des symétries secondaires alternil/symetril. On démontre que certaines symétries de moules peuvent s'établir sans calculs, si ces moules vérifient une équation différentielle donnée.

La partie 5 enfin, discute la construction des formes normales d'objets analytiques locaux (champs de vecteurs et difféomorphismes).

Remerciements

Je remercie Jean Écalle pour ses commentaires, et les fichiers qu'il m'a envoyé dans lesquels j'ai largement puisé des exemples de Moules. Je remercie également Leila Schneps, pour sa relecture critique du manuscrit et son aide dans la refonte de certains passages. Guilaume Morin m'a beaucoup facilité la tache en reprenant la rédaction du dernier chapitre et en rédigeant mes exposés oraux et mes notes sur la méthode d'arborification pour son mémoire de DEA. Enfin, j'exprime ma gratitude à tout ceux qui m'ont encouragé dans cette rédaction, notamment Jean-nicolas Dénarié, Herbert Gangle, Pierre Lochak, Michel Petitot, George Racinet, Pierre Cartier et Michel Waldschmidt.

PARTIE I
PRÉLIMINAIRES

Cette partie consiste en quelques rappels succincts sur les algèbres de Lie libres, les notions de bigèbres et de cogèbres.

1. Algèbre associative et algèbre de lie libre

On renvoie au livre de Serre ([**25**], LA, Chap.4) et Bourbaki ([**1**], chap.2) pour les démonstrations des résultats rappelés dans le §1.

On rappelle qu'un magma libre est un ensemble M muni d'une application $M \times M \to M$, notée $(x, y) \to xy$.

Définition I.1. — *Soit X un ensemble fini. On définit par récurrence une famille d'ensembles $\mathcal{X}_n$, $n \geq 1$, tels que*

i) $\mathcal{X}_1 = X$,
ii) pour $n \geq 2$,

$$\mathcal{X}_n = \coprod_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 1}} \mathcal{X}_p \times \mathcal{X}_q, \tag{I.1}$$

où $\coprod$ dénote la réunion disjointe.

Remarque I.1. — *Un élément de $\mathcal{X}_2$ est un couple (x, y) avec $x, y \in X$; un élément de $\mathcal{X}_3$ sera de la forme $(x,(y, z))$ ou bien $((x, y), z)$, etc. De manière générale, l'ensemble $\mathcal{X}_n$ est l'ensemble des mots parenthésés de longueur n.*

On note $M_X = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$, et on définit la multiplication

$$\begin{array}{lcl} M_X \times M_X & \to & M_X, \\ x_p \times x_q & \to & (x_p, x_q) \in \mathcal{X}_{p+q} \subset M_X, \end{array} \tag{I.2}$$

où $x_p \in \mathcal{X}_p$, $x_q \in \mathcal{X}_q$ et la flèche $\to$ dénote l'inclusion canonique définie par ii). M_X est un magma libre sur X. Un élément w de M_X peut être vu comme un mot non commutatif et non associatif de X. Sa longueur $l(w)$ est l'unique n tel que $w \in \mathcal{X}_n$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et soit A_X la k-algèbre du magma libre M_X ; les éléments $\alpha \in A_X$ sont les sommes finies

$$\alpha = \sum_{m \in M_X} c_m \cdot m, \quad c_m \in \mathbb{K}. \tag{I.3}$$

La multiplication dans A_X étend la multiplication dans M_X ; on continue donc à la noter $(\cdot,\cdot)$. L'algèbre A_X est appelée *l'algèbre libre* A_X sur X.

Soit I l'idéal de A_X engendré par les éléments de la forme (a, a), $a \in A_X$, et par ceux de la forme $J(a, b, c) = ((a, b), c) + ((b, c), a) + ((c, a), b)$ avec $a, b, c \in A_X$. L'algèbre quotient A_X/I est appelé *algèbre de Lie libre* sur X et se note $\mathcal{L}_X$.

Soit $U\mathcal{L}_X$ l'*algèbre enveloppante universelle* de $\mathcal{L}_X$. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre Ass_X de "polynômes associatifs mais non commutatifs sur X".

Nous utilisons la notation suivante pour ces polynômes. L'ensemble X étant supposé fini, posons $X = \{X_1, \ldots, X_N\}$. Pour tout $r \geq 1$, on note Ω^* l'ensemble des suites $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ avec $\omega_i \in \{1, \ldots, N\}$ pour $1 \leq i \leq r$. Pour chaque r, on note $\Omega^{*,r}$ le sous-ensemble de Ω^* constitué des suites de longueur r. A toute suite $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \Omega^*$, on associe un mot de Ass_X, à savoir $X_\omega := X_{\omega_1} \ldots X_{\omega_r}$.

Un élément $m \in Ass_X$ s'écrit alors

$$m = \sum_{\omega \in \Omega} M^\omega X_\omega, \tag{I.4}$$

avec les $M^\omega \in \mathbb{K}$ presque tous égaux à 0.

L'inclusion de $\mathcal{L}_X$ dans son algèbre enveloppante universelle $U\mathcal{L}_X$ donne une inclusion $\mathcal{L}_X \to Ass_X$ puisque $U\mathcal{L}_X \simeq Ass_X$; ce morphisme est donné explicitement par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_X & \hookrightarrow & Ass_X \\ X_i & \mapsto & X_i \\ [X_i, X_j] & \mapsto & X_i X_j - X_j X_i. \end{array} \tag{I.5}$$

Le produit direct $\mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_X$ est aussi une algèbre de Lie, munie du produit de Lie donné par

$$\Big[(x, x'), (y, y')\Big] = \Big([x, y], [x', y']\Big). \tag{I.6}$$

On a l'homomorphisme diagonal d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_X & \to & \mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_X \\ x & \mapsto & (x, x). \end{array} \tag{I.7}$$

Comme on a un isomorphisme

$$U(\mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_X) \xrightarrow{\sim} U\mathcal{L}_X \otimes U\mathcal{L}_X \tag{I.8}$$

donné par

$$(x,y)\mapsto x\otimes 1+1\otimes y, \tag{I.9}$$

l'homomorphisme diagonal induit un homomorphisme appelé coproduit :

$$\begin{array}{rcl}\Delta : U\mathcal{L}_X & \to & U\mathcal{L}_X\otimes U\mathcal{L}_X\\ x & \mapsto & x\otimes 1+1\otimes x.\end{array} \tag{I.10}$$

Comme $U\mathcal{L}_X\simeq Ass_X$, nous avons donc un coproduit

$$\Delta : Ass_X\to Ass_X\otimes Ass_X. \tag{I.11}$$

Le résultat important suivant caractérise de manière naturelle la sous-algèbre de Lie $\mathcal{L}_X$ à l'intérieur de Ass_X :

Théorème I.1. — *Soit X un ensemble fini ; alors l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}_X$ sur X coincide avec l'ensemble des éléments* primitifs *de Ass_X, c'est à dire*

$$\mathcal{L}_X=\{m\in Ass_X,\ \Delta m=m\otimes 1+1\otimes m\}. \tag{I.12}$$

Soit $\mathcal{M}$ l'idéal de l'algèbre Ass_X engendré par l'ensemble X, c'est-à-dire l'idéal de tous les polynomes sans terme constant ; il est engendré par les monômes (non commutatifs).

On définit une application

$$\psi:\mathcal{M}\to\mathcal{L}_X \tag{I.13}$$

en posant

$$\psi(X_{\omega_1}\cdots X_{\omega_r})=\frac{1}{r}[[\cdots[[X_{\omega_1},X_{\omega_2}],X_{\omega_3}]\cdots,X_{\omega_{r-1}}],X_{\omega_r}] \tag{I.14}$$

pour les monômes et en l'étendant par linéarité à tout $\mathcal{M}$.

Comme $\mathcal{L}_X\subset Ass_X$, et d'ailleurs même $\mathcal{L}_X\subset\mathcal{M}$, on peut restreindre ψ à ce sous-ensemble, et on obtient le résultat suivant, appelé *théorème de projection* :

Théorème I.2. — *L'application ψ est une retraction de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{L}_X$, i.e. on a $\psi_{|\mathcal{L}_X}=id_{\mathcal{L}_X}$.*

Par exemple, on sait que l'élément $X_1X_2-X_2X_1\in\mathcal{M}$ appartient en fait à $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$, puisqu'il s'agit de $[X_1,X_2]$; on a bien

$$\psi(X_1X_2-X_2X_1)=\frac{1}{2}[X_1,X_2]-\frac{1}{2}[X_2,X_1]=[X_1,X_2]. \tag{I.15}$$

Les algèbres $\mathcal{L}_X$ et Ass_X sont munies de graduations naturelles par la longueur ; on appelle $\mathcal{L}_X^n$ resp. Ass_X^n l'ensemble des combinaisons linéaires de crochets (resp. de mots) homogènes de longueur n.

On a donc

$$Ass_X = \bigoplus_{r=0}^{\infty} Ass_X^n, \quad L_X = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{L}_X^n. \tag{I.16}$$

On prend les complétés par rapport à ces graduations, que l'on note

$$\hat{Ass}_X = \prod_{r=0}^{\infty} Ass_X^n, \quad \hat{L}_X = \prod_{r=0}^{\infty} \mathcal{L}_X^n; \tag{I.17}$$

un élément m d'un tel complété peut être représenté par une serie formelle

$$m = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r = \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\sum_{\omega \in \Omega_r} M^{\omega} X_{\omega} \Big), \tag{I.18}$$

avec $Y_r \in Ass_X^r$; nous noterons cette somme de manière condensée

$$m = \sum_{\bullet} M^{\bullet} X_{\bullet}. \tag{I.19}$$

Un élément de $\hat{Ass}_X$ est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients $M^{\bullet}$.

Soit $\hat{\mathcal{M}} \in \hat{Ass}_X$ l'idéal engendré par l'ensemble fini X ; c'est donc l'idéal des séries formelles sans terme constant. On définit les applications

$$\exp : \hat{\mathcal{M}} \to 1 + \hat{\mathcal{M}}, \qquad \log : 1 + \hat{\mathcal{M}} \to \hat{\mathcal{M}}, \tag{I.20}$$

par les formules usuelles

$$\exp(x) = \sum \frac{x^n}{n!}, \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}. \tag{I.21}$$

On a

$$\exp \log = \log \exp = 1. \tag{I.22}$$

On définit le *produit tensoriel complété*

$$\hat{Ass}_X \hat{\otimes} \hat{Ass}_X = \prod_{p,q} Ass_X^p \otimes = Ass_X^q, \tag{I.23}$$

et on note que le coproduit Δ s'étend aux complétés, ainsi que le théorème I.1, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_X$ s'identifie à l'intérieur de $\hat{Ass}_X$ avec l'ensemble des $m \in \hat{Ass}_X$ tels que $\Delta(m) = m \otimes 1 + 1 \otimes m$ dans $\hat{Ass}_X \hat{\otimes} \hat{Ass}_X$. On a le résultat important suivant :

Théorème I.3. — *L'application* exp *définit une bijection de l'ensemble des éléments primitifs $\alpha \in \hat{\mathcal{M}}$, c'est-à-dire tels que $\Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$, vers l'ensemble des $\beta \in 1 + \hat{\mathcal{M}}$ tels que $\Delta\beta = \beta \otimes \beta$.*

2. Cogèbres et bigèbres

2.1. Cogèbres et coproduit. — Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition I.2. — *On appelle cogèbre sur $\mathbb{K}$ un triplet (E, Δ, ε) ou E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, Δ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\Delta : E \to E \otimes_k E$, dit coproduit de E, et $\varepsilon : E \to \mathbb{K}$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire, tels que*

$$c(\mathrm{id}_E \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_E) \circ \Delta \tag{I.24}$$

$$(\mathrm{id}_E \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_E) \circ \Delta = \mathrm{id}_E. \tag{I.25}$$

On donne un exemple dans la prochaine section.

2.2. Bigèbres et graduations. — Une bigèbre est un quintuplet $(E, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ tel que

(1) (E, μ, η) est une algèbre, i.e. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mu : E \otimes_{\mathbb{K}} E \to E$ et $\eta : \mathbb{K} \to E$ sont des applications $\mathbb{K}$-linéaires telles que

$$\mu \circ (\mu \otimes 1) = \mu \circ (1 \otimes \mu) \ : E \otimes_{\mathbb{K}} E \otimes_{\mathbb{K}} E \to E, \tag{I.26}$$

$$\mu \circ (1 \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes 1) = 1 \qquad : E \to E, \tag{I.27}$$

en identifiant $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} E = E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = E$.

(2) (E, Δ, ε) est une cogèbre (voir §2.1)

(3) Δ et ε sont des homomorphismes d'algèbres.

Une bigèbre est *graduée* si l'algèbre sous-jacente est munie d'une graduation.

Définition I.3. — *Dans toute la suite, un élément x d'une bigèbre E munie d'un coproduit Δ sera dit primitif si*

$$\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \tag{I.28}$$

et "group-like" si

$$\Delta x = x \otimes x. \tag{I.29}$$

2.3. Exemples. —

2.4. Algèbre de dérivations. — On renvoie au livre de Jacobson ([**19**], chap.1, §2, p.7-8) pour plus de détails.

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre non associative quelconque. Une *dérivation* D (ou *opérateur différentiel d'ordre 1*) sur A est une application linéaire de A dans A satisfaisant

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy). \tag{I.30}$$

On note $\mathrm{Der}(A)$ l'ensemble des dérivations sur A.

Soient D_1, $D_2 \in \mathrm{Der}(A)$; on a

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(xy) &= D_1(xy) + D_2(xy), \\ &= (D_1x)y + x(D_1y) + (D_2x)y + x(D_2y), \\ &= (D_1 + D_2)xy + x(D_1 + D_2)y. \end{aligned} \tag{I.31}$$

Par conséquent $D_1 + D_2 \in \mathrm{Der}(A)$. De même, on a $\alpha = D_1 \in \mathrm{Der}(A)$ si $\alpha \in \mathbb{K}$. On voit donc que $\mathrm{Der}(A)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On peut composer les dérivations ; la composition de D_2 et D_1 est donnée par

$$\begin{aligned} D_2D_1(xy) &= D_2((D_1x)y + x(D_1y)), \\ &= (D_2D_1x)y + D_1xD_2y + D_2xD_1y + xD_2D_1y. \end{aligned} \tag{I.32}$$

On peut même donner la formule générale pour l'action d'un opérateur différentiel $B = D_1 \circ \cdots \circ D_r$ d'ordre r sur xy ; elle n'est pas bien belle, mais elle peut être utile.

Définition I.4. — *Pour chaque entier $r \geq 1$, nous introduisons l'ensemble P_r de paires*

$$\Big((i_1, \ldots, i_n), (j_1, \ldots, j_m)\Big) \tag{I.33}$$

de suites d'entiers, sous-ensembles de la suite $(1, \ldots, r)$, telles que

$$\begin{aligned} &n + m = r \\ &1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r \\ &1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq r \\ &\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} = \emptyset \\ &\{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{j_1, \ldots, j_m\} = \{1, \ldots, r\}. \end{aligned} \tag{I.34}$$

Les paires $\Big(\emptyset, (1, \ldots, r)\Big)$ et $\Big((1, \ldots, r), \emptyset\Big)$ sont incluses dans P_r. Nous écrirons souvent $\underline{i}$ pour $(i_1, \ldots, i_n)$ et $\underline{j}$ pour $(j_1, \ldots, j_m)$), donc $(\underline{i}, \underline{j}) \in P_r$.

L'action d'un opérateur différentiel B est donnée explicitement par

$$B(xy) = \sum_{(\underline{i},\underline{j}) \in P_r} (B_{\underline{i}}x)(B_{\underline{j}}y) \tag{I.35}$$

où

$$B_{\underline{i}} = D_{i_1}D_{i_2} \cdots D_{i_n} \quad \text{et} \quad B_{\underline{j}} = D_{j_1}D_{j_2} \cdots D_{j_m}. \tag{I.36}$$

La composition de r dérivations forme un opérateur différentiel d'ordre r, qui n'est pas une dérivation si $r > 1$; l'ensemble des dérivations ne forme donc pas une algèbre pour cette multiplication.

Par contre, en posant $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$, on obtient

$$[D_1, D_2]xy = \big([D_1, D_2]x\big)y + x\big([D_1, D_2]y\big). \tag{I.37}$$

Par conséquent, $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}(A)$ et $[\ ,\ ]$ fait de $\mathrm{Der}(A)$ une algèbre de Lie appelée *algèbre de Lie des dérivations* ou *algèbre de dérivations* de A.

Soit $F(A) = D_1, \ldots, D_i$, une famille finie de dérivations de $\mathrm{Der}(A)$. On note $\mathbb{K}\langle\langle F(A)\rangle\rangle$ l'anneau des séries formelles sur l'alphabet $F(A)$. Précisons que nous considérons l'identité id_A comme l'unique opérateur différentiel d'ordre 0, et nous l'identifions avec l'élément $1 \in \mathbb{K}$. De cette manière, tous les éléments de $\mathbb{K}\langle\langle F(A)\rangle\rangle$ sont des opérateurs sur A.

On peut munir l'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle F(A)\rangle\rangle$ d'une structure de cogèbre.

Counité. On note ε l'homomorphisme

$$\varepsilon : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle \to \mathbb{K} \tag{I.38}$$

défini en associant à chaque série formelle de $\mathbb{K}\langle\langle F(A)\rangle\rangle$ son terme constant.

Coproduit. A toute dérivation $D \in \mathrm{Der}(A)$ on associe un opérateur de $A \otimes A$ dans $A \otimes A$, noté $\bar{D}$, par

$$\bar{D}(\phi \otimes \psi) = D\phi \otimes \psi + \phi \otimes D\psi. \tag{I.39}$$

Si D_1 et D_2 sont deux dérivations, on construit une application naturelle de $A \otimes A$ dans $A \otimes A$ notée $D_1 \otimes D_2$, définie par

$$(D_1 \otimes D_2)(\phi \otimes \psi) = D_1\phi \otimes D_2\psi. \tag{I.40}$$

Finalement, on définit une application linéaire Δ de $\mathrm{Der}(A)$ dans $\mathrm{Der}(A) \otimes \mathrm{Der}(A)$ par

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Der}(A) & \stackrel{\Delta}{\to} & \mathrm{Der}(A) \otimes \mathrm{Der}(A), \\ D & \mapsto & D \otimes 1 + 1 \otimes D. \end{array} \tag{I.41}$$

On note que

$$\bar{D} = \Delta(D). \tag{I.42}$$

De plus, en notant μ l'opérateur linéaire de $A \otimes A$ dans A défini par $\phi \otimes \psi \mapsto \phi \cdot \psi$, on a l'égalité

$$D \circ \mu = \mu \circ \Delta(D), \tag{I.43}$$

traduisant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{\Delta(D)} & A\otimes A, \\ \downarrow^{\mu} & & \downarrow^{\mu} \\ A & \xrightarrow{D} & A. \end{array} \tag{I.44}$$

On peut définir directement Δ en posant

$$\Delta(B) = \sum_{i+j=r} B_i \otimes B_j. \tag{I.45}$$

Notons que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, et de plus, on a la formule utile

$$\Delta(B_1 B_2) = \Delta(B_1)\Delta(B_2). \tag{I.46}$$

Pour le voir, on commence à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(D_1D_2) & = & (D_1D_2)\otimes 1 + D_1\otimes D_2 + D_2\otimes D_1 + 1\otimes(D_1D_2) \\ & = & (D_1\otimes 1 + 1\otimes D_1)(D_2\otimes 1 + 1\otimes D_2) \\ & = & \Delta(D_1)\Delta(D_2). \end{array} \tag{I.47}$$

et on continue par récurrence.

Lemme I.1. — *Le triplet* $\mathcal{D} = (\mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle, \Delta, \varepsilon)$ *est une cogèbre.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier les axiomes de la définition I.2, i.e.

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\otimes\varepsilon)\circ\Delta = (\varepsilon\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{D}})\circ\Delta = \mathrm{id}_{\mathcal{D}} & : \mathcal{D}\to\mathcal{D} \\ (\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\otimes\Delta)\circ\Delta = (\Delta\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{D}})\circ\Delta & : \mathcal{D}\to\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}. \end{array} \tag{I.48}$$

où $\mathcal{D} = \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle$.

Montrons d'abord qu'elles sont valables pour $1 \in \mathcal{D}$, ensuite pour une dérivation D, puis pour un opérateur différentiel d'ordre r, et finalement pour un objet quelconque de $\mathcal{D}$, i.e. une combinaison linéaire infinie des objets ci-dessus.

Pour 1, en fait, c'est évident. Soit donc $D \in \mathcal{D}$ une dérivation. On a

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(D) & = (\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\otimes\varepsilon)(D\otimes 1 + 1\otimes D) \\ & = D \\ & = (\varepsilon\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{D}})(D\otimes 1 + 1\otimes D) \end{array} \tag{I.49}$$

et

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\otimes\Delta)\circ\Delta(D) & = (\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\otimes\Delta)(D\otimes 1 + 1\otimes D) \\ & = (D\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes D\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes D) \\ & = (\Delta\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{D}})(D\otimes 1 + 1\otimes D). \end{array} \tag{I.50}$$

Montrons maintenant que les relations sont satisfaites pour tout opérateur différentiel $B \in \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle$.

Nous savons que $B = D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_r$; nous allons profiter de l'equation (I.46). Supposons donc que les relations sont satisfaites pour tout opérateur différentiel d'ordre

$< r$ (on vient de voir que c'est vrai pour $r=1$). Posons $B' = D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_{r-1}$. On a alors

$$(\mathrm{I}.51)\qquad \begin{aligned}(\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)\big(\Delta(B)\big) &= (\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)\big(\Delta(B')\Delta(D_r)\big)\\ &= (\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)\big(\Delta(B')\big)(\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)\big(\Delta(D_r)\big)\\ &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(B')\big)(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(D_r)\big)\\ &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(B)\big),\end{aligned}$$

où l'hypothèse de récurrence a été utilisée dans la troisième égalité et on utilise aussi le fait que $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})$ et $(\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \varepsilon)$ sont des homomorphismes de $\mathbb{K}$-algèbres.

Pour la même raison, pour la deuxième relation, on a simplement

$$(\mathrm{I}.52)\qquad \begin{aligned}(\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)\big(\Delta(B)\big) &= (\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)\big(\Delta(B')\Delta(D_r)\big)\\ &= (\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)\big(\Delta(B')\big)(\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes \Delta)\big(\Delta(D_r)\big)\\ &= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(B')\big)(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(D_r)\big)\\ &= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(B')\Delta(D_r)\big)\\ &= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})\big(\Delta(B)\big).\end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration du lemme, on étend le coproduit Δ à tout $\mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle$ par linéarité. □

2.5. Algèbre d'opérateurs différentiels. — Un deuxième type de coproduit intervient naturellement dans l'étude des opérateurs différentiels d'ordre $r \geq 1$, que nous notons B (ou B_r) pour les distinguer des dérivations, habituellement notées D.

Nous avons vu que l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre r sur A pour tout $r \geq 1$ forme une A-algèbre, notée $\mathrm{Op}(A)$, sous la multiplication correspondant simplement à la composition des opérateurs. A partir de B_r, on définit une application de $A \otimes A$ dans $A \otimes A$ par

$$(\mathrm{I}.53)\qquad B_r(\phi \otimes \psi) = \sum_{i+j=r} B_i\phi \otimes B_j\psi,$$

où le sens de cette somme est comme dans (I.35). On obtient un coproduit Δ_* défini sur $\mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Op}(A)\rangle\rangle$ par

$$(\mathrm{I}.54)\qquad \begin{array}{ccc}\mathrm{Op}(A) & \xrightarrow{\Delta_*} & \mathrm{Op}(A) \otimes \mathrm{Op}(A),\\ B_r & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i+j=r} B_i \otimes B_j.\end{array}$$

On a bien sûr, pour tout $B \in \mathrm{Op}(A)$, en conservant les notations précédentes

$$(\mathrm{I}.55)\qquad B \circ \mu = \mu \circ \Delta_*(B).$$

Notons que l'equation (I.46) reste valable pour Δ_*.

Lemme I.2. — *L'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Op}(A)\rangle\rangle$, muni du coproduit Δ_* et de l'application linéaire ε du lemme I.1, forme une cogèbre.*

Démonstration. — Pour tout opérateur différentiel B d'ordre $r \geq 0$, nous vérifions directement que

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_E \otimes \Delta_*)\big(\Delta_*(B)\big) &= (\mathrm{id}_E \otimes \Delta_*)\big(\sum_{i+j=r} (B_i \otimes B_j)\big)\\ &= \sum_{i+j=r} (\mathrm{id}_E \otimes \Delta_*)\big(B_i \otimes B_j\big)\\ &= \sum_{i+j=r} \big(B_i \otimes \Delta_*(B_j)\big)\\ &= \sum_{i+j=r} \big(B_i \otimes \sum_{i'+j'=j} (B'_{i'} \otimes B'_{j'})\big)\\ &= \sum_{i+i'+j'=r} \big(B_i \otimes B'_{i'} \otimes B'_{j'}\big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\Delta_* \otimes \mathrm{id}_E)\big(\Delta_*(B)\big) &= (\Delta_* \otimes \mathrm{id}_E)\big(\sum_{i+j=r} (B_i \otimes B_j)\big)\\ &= \sum_{i+j=r} (\Delta_* \otimes \mathrm{id}_E)\big(B_i \otimes B_j\big)\\ &= \sum_{i+j=r} \big(\Delta_*(B_i) \otimes B_j\big)\\ &= \sum_{i+j=r} \big(\sum_{i'+j'=i} (B'_{i'} \otimes B'_{j'}) \otimes B_j\big)\\ &= \sum_{i'+j'+j=r} \big(B'_{i'} \otimes B'_{j'} \otimes B_j\big),\end{aligned}$$

qui est évidemment la même chose. Pour la deuxième relation, on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_E \otimes \varepsilon)\big(\Delta(B)\big) &= (\mathrm{id}_E \otimes \varepsilon)\big(\sum_{i+j=r} (B_i \otimes B_j)\big)\\ &= \sum_{i+j=r} (\mathrm{id}_E \otimes \varepsilon)\big(B_i \otimes B_j\big)\\ &= B,\end{aligned}$$

puisque $\varepsilon(B_j) = 0$ sauf si $j = 0$, auquel cas $B_j = 1$ et $\varepsilon(B_j) = 1$.

De même, bien sûr, on a

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_E)\big(\Delta(B)\big) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_E)\big(\sum_{i+j=r} (B_i \otimes B_j)\big)\\ &= \sum_{i+j=r} (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_E)\big(B_i \otimes B_j\big) = B,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

PARTIE II
CALCUL MOULIEN

On définit les moules et les principales opérations algébriques sur ces objets via les séries formelles non-commutatives associées. On donne la traduction des diverses propriétés algébriques des séries (primitive/group-like) sur les moules associés, pour les bigèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$, consuisant aux symétries alterna(e)l/symetra(e)l respectivement.

1. Moules

Soit A un alphabet. On note A^* l'ensemble des mots construits sur A. Les moules sont définis par :

Définition II.1. — *Soit A un alphabet et $\mathbb{K}$ un anneau. Un moule sur A à valeur dans $\mathbb{K}$ est une application, notée $M^\bullet$, de A^* dans $\mathbb{K}$.*

La notation $M^\bullet$ pour désigner une application de A^* dans $\mathbb{K}$ n'est pas usuelle, mais elle coincide avec la notation utilisée par Jean Ecalle.

Par convention, un moule $M^\bullet$ étant donné, on note $M^{\underline{a}}$ la quantité $M^\bullet(\underline{a})$ pour tout $\underline{a} \in A^*$.

Les moules sont évidemment en correspondance bi-univoque avec les séries formelles non commutatives de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. En effet, a tout moule $M^\bullet$ sur A, on associe la série $S(M) = \sum_{\underline{a}\in A^*} M^{\underline{a}}\underline{a}$ et vice versa.

La structure d'algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ se transporte sur l'ensemble des moules sur A à valeur dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A)$. Nous allons voir que ce passage des séries aux coefficients est souvent intéressant dans de nombreuses applications. Par ailleurs, les différentes propriétés algèbriques des séries $S(M)$ se lisent complètement sur le moule associé, ce qui justifie a posteriori la terminologie.

2. Les bigèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$

Le travail d'Écalle repose sur l'étude combinatoire de deux bigèbres, notées $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$[11], et qui mîment pour l'essentiel les propriétés des bigèbres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ des séries formelles sur

[11] J'ai emprunté cette notation à C. Even.

les dérivations et les opérateurs différentiels respectivement.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit X un alphabet et $Y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un alphabet codé par un semi-groupe additif[12].

On note $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$), la $\mathbb{K}$-algèbre des séries formelles non commutatives formée sur X^* (resp. Y^*).

Définition II.2. — *On note $\mathbb{A} = (\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle, \varepsilon, \Delta)$ la cogèbre définie par :*

i) le coproduit Δ est défini sur les lettres x de X par

$$\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x, \quad \forall x\in X. \tag{II.1}$$

Le coproduit d'un mot $\underline{x} = x_1\dots x_r$ se calcule via la propriété

$$\Delta(\underline{x}^1\underline{x}^2) = \Delta(\underline{x}^1)\Delta(\underline{x}^2),\ \forall \underline{x}^1, \underline{x}^2\in X^*. \tag{II.2}$$

On étend Δ à $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ par linéarité, en particulier

$$\Delta(\emptyset) = \Delta(1) = 1\otimes 1.$$

ii) On définit la counité ε par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle & \to & \mathbb{K}, \\ \displaystyle\sum_{\underline{x}\in X^*} M^{\underline{x}}\underline{x} & \mapsto & M^{\emptyset}. \end{array} \tag{II.3}$$

Le coproduit Δ de $\mathbb{A}$ est le coproduit naturel. La propriété (II.2) traduit le fait que Δ est un morphisme d'algèbre.

Définition II.3. — *Rappelons que Y est un alphabet codé par un semi-groupe. Notons $\mathbb{E} = (\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle, \Delta_*, \varepsilon)$ la cogèbre définie par :*

i) Le coproduit Δ_* est défini sur les lettres de Y par

$$\Delta_*(y_r) = \sum_{i+j=r} y_i\otimes y_j. \tag{II.4}$$

[12] Pour simplifier l'exposé, j'ai choisi de coder l'alphabet par le semi-groupe $\mathbb{N}$. Néanmoins, l'ensemble des calculs menés sur Y se transposent sans problèmes sur un alphabet $Y_\Omega = \{y_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, où Ω est un semi-groupe quelconque. Dans ce cas d'ailleurs, on remplace la lettre y_ω par l'élément du semi-groupe ω si aucune confusion n'est possible. Dans la suite, lorsque des ω apparaîtront dans le context de l'alphabet Y, il faudra comprendre "le cas général où on a un semi-groupe pour coder l'alphabet".

On étend Δ_* à Y^* par la propriété :

$$\Delta_*(\underline{y}^1\underline{y}^2) = \Delta_*(\underline{y}^1)\Delta_*(\underline{y}^2), \quad \forall \underline{y}^1, \underline{y}^2 \in Y^*. \tag{II.5}$$

On étend Δ_* à $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$ par linéarité.

ii) la counité sur $\mathbb{E}$ est définie comme dans la définition II.2, ii).

On voit que les cogèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$ sont en fait des bigèbres : en effet, $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$) est une algèbre, Δ et Δ_* sont des homomorphismes d'algèbres, et la condition sur ε est évidente.

Encore une fois, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$ sont des bigèbres graduées, car les algèbres $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$ sont munies de la graduation naturelle donnée par la longueur des mots dans l'alphabet X (resp. Y).

3. Combinatoire sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$, battage et battage contractant

3.1. Combinatoire sur $\mathbb{A}$. — On prend comme ci-dessus un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro et un alphabet X. On considère la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. Plaçons-nous dans la bigèbre graduée $\mathbb{A}$ obtenu en munissant $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ du coproduit Δ de la définition II.2.

Soit X^* l'ensemble des mots (ou suites) de lettres de X, y compris le mot vide $\emptyset$. Nous écrivons $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$ pour un élément de X^*. L'entier r s'appelle la longueur de la suite ; si $r = 1$ alors $\underline{x} \in X$, et l'unique élément de X^* de longueur 0 est $\emptyset$.

Notons $C(X)$ l'ensemble des couples de suites de X^* ; on note un couple de suites $\langle \underline{x}^1; \underline{x}^2\rangle = \langle (x_1^1, \dots, x_n^1); (x_1^2, \dots, x_m^2)\rangle$.

Définition II.4. — *À chaque $\underline{x} \in X^*$, soit $C_{\underline{x}}$ le sous-ensemble de $C(X)$ de couples de suites "engendré par $\Delta(\underline{x})$", i.e. apparaissant dans l'expression de $\Delta(\underline{x})$.*

• Pour $r = 0$, on a

$$\Delta(\emptyset) = \Delta(1) = 1 \otimes 1 = \emptyset \otimes \emptyset$$

donc

$$C_\emptyset = \Big\{ \langle \emptyset; \emptyset\rangle \Big\}.$$

• Pour $r = 1$, on a

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

donc

$$C_x = \Big\{ \langle x; \emptyset\rangle, \langle \emptyset; x\rangle \Big\}.$$

• Pour $r=2$, on a $\underline{x}=(x_1,x_2)$ et

$$\begin{array}{rcl}\Delta(x_1x_2) & = & \Delta(x_1)\Delta(x_2)\\ & = & (x_1\otimes 1+1\otimes x_1)(x_2\otimes 1+1\otimes x_2)\\ & = & x_1x_2\otimes 1+x_2\otimes x_1+x_1\otimes x_2+1\otimes x_1x_2\\ & = & \underline{x}\otimes\emptyset+x_2\otimes x_1+x_1\otimes x_2+\emptyset\otimes\underline{x}.\end{array}$$

donc

$$C_{\underline{x}=(x_1,x_2)}=\{\langle\underline{x};\emptyset\rangle,\langle x_1;x_2\rangle,\langle x_2;x_1\rangle,\langle\emptyset;\underline{x}\rangle\},$$

• Pour tout $r\geq 0$, on a $|C_{\underline{x}}|=2^r$ si $\underline{x}$ contient r composantes distinctes. De manière générale, on voit que l'ensemble des couples apparaissant dans l'expression de $\Delta(\underline{x})$, c'est-à-dire les couples de $C_{\underline{x}}$, est donné par

$$C_{\underline{x}}=\left\{\left\langle\underline{x}_{\underline{i}};\underline{x}_{\underline{j}}\right\rangle\mid(\underline{i},\underline{j})\in P_r\right\}, \tag{II.6}$$

où $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_r)$ est une suite de X^* de longueur r, la définition de l'ensemble P_r des paires de suites d'entiers associé à un entier $r\geq 1$ est donnée dans la définition I.4 du §I.2.4, et pour

$$\underline{i}=(i_1,\ldots,i_n),\quad \underline{j}=(j_1,\ldots,j_m)$$

on a

$$\underline{x}_{\underline{i}}=(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}),\quad \underline{x}_{\underline{j}}=(x_{j_1},\ldots,x_{j_m}).$$

Nous arrivons maintenant à la définition et aux résultats principaux de cette section.

Définition II.5. — *Soit $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ un couple de suites. On appelle battage de $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ et on note* $\mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$ *l'ensemble des suites obtenues en mélangeant les éléments des deux suites $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$ en préservant l'ordre interne de chacune d'elles.*

Exemple. Soit $\underline{x}^1=(a,b)$ et $\underline{x}^2=c$, alors

$$\mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)=\{(a,b,c),\ (a,c,b),\ (c,a,b)\}. \tag{II.7}$$

Proposition II.1. — *Soit $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ un couple de suites. L'ensemble des mots $\underline{s}$ telles que $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ soit dans $C_{\underline{s}}$ est donné par l'ensemble de battage* $\mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$.

Démonstration. — Pour démontrer cette proposition, nous introduisons une action de X sur $C(X)$ qui nous aidera à classer les couples apparaissant dans $C_{\underline{x}}$.

Soit $x\in X$, et $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2\in X^*$. La multiplication dans $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle\otimes_{\mathbb{K}}k\langle\langle X\rangle\rangle$ des deux éléments $\Delta(X)$ et $\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2$ donne

$$\Delta(x)\cdot(\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2)=x\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2+\underline{x}^1\otimes x\underline{x}^2. \tag{II.8}$$

Cette formule peut se traduire en une action, ou plutôt une somme de deux actions de X sur $C(X)$. En effet, définissons deux actions de X sur $C(X)$ comme suit :

$$\begin{array}{rlcl} a^+ : & X \times C(X) & \to & C(X), \\ & (x, \langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle) & \mapsto & \langle \underline{x}^1 ; (x, \underline{x}^2) \rangle, \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} a^- : & X \times C(X) & \to & C(X), \\ & (x, \langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle) & \mapsto & \langle (x, \underline{x}^1) ; \underline{x}^2 \rangle, \end{array}$$

où $(x, \underline{x}^i)$ dénote la concaténation des suites x et $\underline{x}^i$ dans X^*.

Pour tout $x \in \Omega$, les opérateurs a_x^- et a_x^+ vérifient

$$a_{x_1}^+ a_{x_2}^- = a_{x_2}^- a_{x_1}^+ .$$

Les actions de a_x^+ et de a_x^- sont *non commutatives* :

On a $a_{x_1}^+ a_{x_2}^+ = a_{x_2}^+ a_{x_1}^+$ (resp. $a_{x_1}^- a_{x_2}^- = a_{x_2}^- a_{x_1}^-$) si et seulement si $x_1 = x_2$.

L'égalité (II.8) se traduit par la relation récursive suivante sur les ensembles $C_{\underline{x}}$:

$$C_{\underline{x}} = (x_1, \dots, x_r) = a_{x_1}^+ \left(C_{(x_2, \dots, x_r)} \right) + a_{x_1}^- \left(C_{(x_2, \dots, x_r)} \right), \tag{II.9}$$

où l'on étend les a^+ et a^- aux ensembles de paires en prenant la somme.

Autrement dit, on a l'énoncé suivant qui découle en fait immédiatement de cette remarque :

Lemme II.1. — *Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$. Alors les éléments de $C_{\underline{x}}$ sont donnés par*

$$a_{x_1}^{\sigma_1} a_{x_2}^{\sigma_2} \dots a_{x_r}^{\sigma_r} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle, \tag{II.10}$$

où $\sigma_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r$.

Nous terminons maintenant la démonstration de la proposition II.1.

Une direction est facile : si $\underline{x} \in \mathrm{sh}(\underline{x}^1, \underline{x}^2)$, alors (II.6) montre que $\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle \in C_{\underline{x}}$.

Supposons donc que $\underline{x}$ est une suite telle que $\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle$ est dans $C_{\underline{x}}$. Alors la longueur r de $\underline{x}$ est égale à la somme des longueurs de $\underline{x}^1$ et de $\underline{x}^2$ (disons n et m respectivement avec $n + m = r$). Ecrivons $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$. On a vu au lemme II.1 que les 2^r éléments de $C_{\underline{x}}$ sont donnés par

$$a_{x_1}^{\sigma_1} \cdots a_{x_r}^{\sigma_r} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle$$

où $\sigma_i = \pm 1$.

Si $\langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle \in C_{\underline{x}}$, i.e. si $\underline{x}$ est un r-uple tel que

$$a_{x_1}^{\sigma_1} \cdots a_{x_r}^{\sigma_r} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle = \langle \underline{x}^1 ; \underline{x}^2 \rangle, \tag{II.11}$$

alors il y a n des σ_i qui sont égaux à -1, disons $\sigma_{i_1} = \cdots = \sigma_{i_n} = -1$, et les m autres sont égaux à $+1$, disons $\sigma_{j_1} = \cdots = \sigma_{j_m} = +1$, où $\{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{j_1, \ldots, j_m\} = \{1, \ldots, r\}$ et $1 \leq i_1 < \cdots i_n \leq r$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq r$.

Alors (II.11) implique que $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}) = (\omega^1_1, \ldots, \omega^1_n)$ et $(s_{j_1}, \ldots, s_{j_m}) = (x^2_1, \ldots, x^2_m)$, ce qui équivaut à dire que $\underline{x} \in \mathrm{sh}(\underline{x}^1, \underline{x}^2)$. □

3.2. Combinatoire sur $\mathbb{E}$. — Plaçons-nous maintenant dans la bigèbre $\mathbb{E}$, c'est-à-dire dans l'algèbre $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$ munie du coproduit Δ_* de la définition II.3. Rappelons que Y est un alphabet codé par un semi-groupe, et que Y^* dénote l'ensemble des suites $(y_{s_1}, \ldots, y_{s_r})$ de r éléments de Y ; la suite de longueur $r = 0$ est $\emptyset$. On considère la concaténation $\underline{yy'}$ de deux suites dans Y^* ; il est entendu que $\underline{y}\emptyset = \emptyset\underline{y} = \underline{y}$; la longueur de la suite concaténée de deux suites de longueurs n et m respectivement est $n + m$.

Définition II.6. — *Comme au §3.1, nous associons à chaque $\underline{y} \in Y^*$ un ensemble de couples de suites $C^*_{\underline{y}}$ "engendré par $\Delta_*(\underline{y})$", i.e. contenant tous les couples apparaissant dans la somme $\Delta_*(\underline{y})$.*

• Pour $r = 0$, d'après la définition II.3, on a

$$\Delta_*(\emptyset) = 1 \otimes 1 =,$$

donc

$$C^*_{\emptyset} = \{\langle\emptyset; \emptyset\rangle\}. \tag{II.12}$$

• Pour $r = 1$ et $y_s \in Y$, on a

$$\Delta_*(y_s) = \sum_{k+l=s} y_k \otimes y_l. \tag{II.13}$$

On a donc

$$C^*_{y_s} = \Big\{\langle y_k, y_l\rangle \mid k + l = s, 0 \leq k, l \leq s\Big\}. \tag{II.14}$$

• Pour $r = 2$, si y_i et y_j sont deux lettres de Y et on pose $\underline{y} = y_i y_j$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_*(\underline{y}) &= \Delta_*(y_i)\Delta_*(y_j) \\ &= \Big(\sum_{k+l=i} y_k \otimes y_l\Big)\Big(\sum_{k'+l'=j} y_{k'} \otimes y_{l'}\Big) \\ &= \sum_{k+l=i}\sum_{k'+l'=j} y_k y_{k'} \otimes y_l y_{l'}. \end{aligned} \tag{II.15}$$

On obtient donc

$$C^*_{\underline{y}} = \Big\{\Big\langle y_k y_{k'}; y_l y_{l'}\Big\rangle \mid k + k' = i,\ l + l' = j,\ 0 \leq k, k' \leq i,\ 0 \leq l, l' \leq j\Big\}. \tag{II.16}$$

On arrive à la définition et aux résultats principaux de cette section.

Définition II.7. — *Soit* $\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle$ *un couple de suites. On appelle battage contractant de* $\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle$*, et on note* $\mathrm{csh}(\underline{y}^1, \underline{y}^2)$*, l'ensemble des suites obtenues par battage de* $\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle$ *suivi de la contraction éventuelle*

$$(y_{s_i^1}, y_{s_j^2}) \overset{*}{\mapsto} y_{s_i^1 + s_j^2}, \tag{II.17}$$

d'une ou plusieurs paires $(y_{s_i^1}, y_{s_j^2})$ *d'éléments consécutifs provenant de* $\underline{y}^1$ *et* $\underline{y}^2$*.*

Proposition II.2. — *Soit* $\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle$ *un élément de* $Y^* \times Y^*$*. L'ensemble des suites* $\underline{y}$ *telles que* $\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle$ *soit dans* $C^*_{\underline{y}}$ *est donné par le battage contractant de* $(\underline{y}^1, \underline{y}^2)$*.*

Démonstration. — Soient a^+ et a^- les opérateurs introduits au §3.1. Notons les faits suivants.

• Pour $y_s \in Y$, les éléments de $C^*_{y_s}$ s'obtiennent en appliquant au couple $\langle \emptyset ; \emptyset \rangle$, seul élément de $C^*_{\emptyset}$, tous les opérateurs

$$a^-_{y_{s_1}} a^+_{y_{s_2}} \ \text{ avec } \ s_1 + s_2 = s, \ 0 \leq s_1, s_2 \leq s\}. \tag{II.18}$$

• Pour $\underline{y} = y_{s_1} \dots y_{s_r} \in Y^*$, $r \geq 2$, les éléments de $C^*_{\underline{y}}$ s'obtiennent en appliquant tous les opérateurs

$$a^-_{y_{k_1}} a^+_{y_{k_2}} \ \text{ avec } \ k_1 + k_2 = s_1, \ 0 \leq k_1, k_2 \leq s_1\} \tag{II.19}$$

aux couples de $C^*_{y_{s_2} \dots y_{s_r}}$. On résume ce résultat dans l'énoncé suivant.

Lemme II.2. — *Soit* $\underline{y} = y_{s_1} \dots y_{s_r}$ *une suite de* Y^**, et* $C^*_{\underline{y}}$ *l'ensemble des couples de suites engendré par* $\Delta_*(\underline{y})$*. Tout élément de* $C^*_{\underline{y}}$ *est de la forme*

$$b_{y_{s_1}} b_{y_{s_2}} \dots b_{y_{s_r}} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle, \tag{II.20}$$

où chaque opérateur $b_{y_{s_i}}$ *est de la forme*

$$b_{y_{s_i}} = a^-_{y_{s_1^i}} a^+_{y_{s_2^i}} \ \textit{ avec } \ s_1^i + s_2^i = s_i, \ 0 \leq s_1^i, s_2^i \leq s_i\}. \tag{II.21}$$

Terminons maintenant la démonstration de la proposition II.2.

Pour la première direction, on suppose que $\underline{y} = y_{s_1} \dots y_{s_t} \in \mathrm{csh}(\underline{y}^1, \underline{y}^2)$, $t \leq r$.

Ceci veut dire que $\underline{y}$ est obtenu d'un élément de $\mathrm{sh}(\underline{y}^1, \underline{y}^2)$, donné par une partition de $\{1, \dots, r\}$ comme d'habitude en deux sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_n\}$ et $\{j_1, \dots, j_m\}$ avec $n + m = r$, par additions successives de paires d'éléments adjacents provenant de $\underline{y}^1$ et $\underline{y}^2$ respectivement.

En d'autres termes, on a pour $1 \leq i \leq t$, y_{s_i} est égal soit à une composante de $\underline{y}^1$, soit à une composante de $\underline{y}^2$, soit à la contraction d'une composante de $\underline{y}^1$ et une composante de $\underline{y}^2$.

Pour $1 \leq i \leq t$, on pose

$$b_{y_{s_i}} = \begin{cases} a^-_{y_{s^1_j}} & \text{si } y_{s_i} = y_{s^1_j} \text{ est une composante de } \underline{y}^1 \\ a^+_{y_{s^2_k}} & \text{si } y_{s_i} = y_{s^2_k} \text{ est une composante de } \underline{y}^2 \\ a^-_{y_{s^1_j}} a^+_{y_{s^2_k}} & \text{si } y_{s_i} = y_{s_{j^1}+s_{k^2}}. \end{cases} \tag{II.22}$$

Alors $b_{y_{s_1}} \cdots b_{y_{s_t}} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle \in C^*_{\underline{y}}$ par le lemme II.2, et $b_{y_{s_1}} \cdots b_{y_{s_t}} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle = \langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle$, ce qui prouve que si $\underline{y} \in \operatorname{csh}(\underline{y}^1, \underline{y}^2)$, alors

$$\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle \in C_{\underline{y}}. \tag{II.23}$$

On démontre maintenant la direction inverse, à savoir : si $\underline{y} = y_{s_1} \dots y_{s_t}$ est tel que $\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle \in C_{\underline{y}}$, alors $\underline{y} \in \operatorname{csh}(\underline{y}^1, \underline{y}^2)$.

Par le lemme II.2, on sait que

$$\langle \underline{y}^1 ; \underline{y}^2 \rangle = b_{y_{s_1}} \cdots b_{y_{s_t}} \langle \emptyset ; \emptyset \rangle = \Big\langle (y_{s^1_1} \dots y_{s^1_t} ; y_{s^2_1} \dots y_{s^2_t} \Big\rangle, \tag{II.24}$$

avec $b_{y_{s_i}} = a^-_{y_{s^1_i}} a^+_{y_{s^2_i}}$ pour $1 \leq i \leq t$, et $s^1_i + s^2_i = s_i$.

Supposons que $\underline{y}^1 = y_{k_1} \dots y_{k_n}$ et $\underline{y}^2 = y_{l_1} \dots y_{l_m}$. On constate donc que

$$\underline{y}^1 = y_{k_1} \dots y_{k_n} = y_{s^1_1} \dots y_{s^1_t}, \tag{II.25}$$

et

$$\underline{y}^2 = y_{l_1} \dots y_{l_m} = y_{s^2_1} \dots y_{s^2_t}. \tag{II.26}$$

Avec les conditions $s^1_i + s^2_i = s_i$ pour $1 \leq i \leq t$, ceci force la valeur de chaque $y_{s^1_i}$ et $y_{s^2_i}$. En effet, on a forcément

$$(y_{s^1_i}, y_{s^2_i}) = \begin{cases} (y_{k_j}, \emptyset) & \text{si } y_{s_i} = y_{k_j} \text{ est une composante de } \underline{y}^1 \\ (\emptyset, y_{l_j}) & \text{si } y_{s_i} = y_{l_j} \text{ est une composante de } \underline{y}^2 \\ (y_{k_j}, y_{l_{j'}}) & \text{si } s_i = k_j + l_{j'} \text{ est une somme.} \end{cases} \tag{II.27}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition II.2. □

4. Éléments primitifs de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$

4.1. Éléments primitifs de $\mathbb{A}$. — On se place de nouveau dans la cogèbre $\mathbb{A}$, d'algèbre sous-jacente $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$, sur l'alphabet X. Rappelons qu'un *moule* est naturellement associé à une série non commutative dans les variables $x \in X$, i.e. un élément

$$\sum_{\underline{x} \in X^*} M^{\underline{x}} \underline{x} \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle.$$

Définition II.8. — *Un moule $M^\bullet$ est dit alternal si*

$$\sum_{\underline{x} \in \operatorname{sh}(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} M^{\underline{x}} = 0 \qquad \forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in X^* \setminus \{1\}. \tag{II.28}$$

Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une suite, et $l(\underline{x}) = r$ sa longueur. L'action de Δ sur $\underline{x}$ donne une expression de la forme

$$\Delta(\underline{x}) = \underline{x} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{x} + \sum_{(\underline{x}^1, \underline{x}^2) \in \widetilde{C}_{\underline{x}}} \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \tag{II.29}$$

où $\widetilde{C}_{\underline{x}} = C_{\underline{x}} \setminus \{\langle \underline{x}; \emptyset \rangle, \langle \emptyset; \underline{x} \rangle\}$.

Le but des deux théorèmes suivants est de démontrer que l'*alternalité* d'un moule exprime sa *primitivité* en tant qu'élément de la cogèbre $\mathbb{A}$ (on rappelle que $P \in \mathbb{A}$ est *primitif* si $\Delta(P) = P \otimes 1 + 1 \otimes P$).

Une propriété essentielle des éléments primitifs est la suivante :

Lemme II.3. — *Un élément primitif $P \in \mathbb{A}$ a un terme constant égal à* 0.

Démonstration. — En effet, si le terme constant de P (i.e. le coefficient de 1) est égal à $a \in \mathbb{K}$, alors le terme constant de $\Delta(P)$ est égal à $a(1 \otimes 1)$ alors que le terme constant de $P \otimes 1 + 1 \otimes P$ est égal à $a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Si P est primitif on a donc $a \otimes 1 + 1 \otimes a = a \otimes a$. On en déduit

$$\begin{aligned} (a+1) \otimes (a+1) &= a \otimes a + a \otimes 1 + 1 \otimes a + 1 \otimes 1, \\ &= (2a+1) \otimes (2a+1), \end{aligned}$$

soit, $a + 1 = 2a + 1$, et donc $a = 0$. ☐

Ceci correspond au fait que les éléments de Lie dans une algèbre associative libre appartiennent tous à l'idéal $\mathcal{M}$ engendré par les séries sans terme constant (voir la partie I).

Proposition II.3. — *On note $X^{*,r}$ l'ensemble des mots de longueur r construits sur X. L'élément $\displaystyle\sum_{\underline{x} \in X^{*,r}} M^{\underline{x}} \underline{x}$ est un élément primitif si et seulement si pour tout couple de suites $\langle \underline{x}^1; \underline{x}^2 \rangle$ avec $l(\underline{x}^1) = n > 0$, $l(\underline{x}^2) = m > 0$, $n + m = r$, on a*

$$\sum_{\underline{x} \in \mathrm{sh}(\underline{x}^1, \underline{x}^2)} M^{\underline{x}} = 0. \tag{II.30}$$

Démonstration. — Posons

$$P = \sum_{\underline{x} \in X^{*,r}} M^{\underline{x}} \underline{x}. \tag{II.31}$$

En utilisant la formule (II.29), on voit que

$$\text{(II.32)}\qquad \begin{array}{rcl} \Delta(P)=\Delta\Big(\displaystyle\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\underline{x}\Big) & = & \displaystyle\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\,\Delta(\underline{x}) \\ & = & \displaystyle\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}(\underline{x}\otimes 1+1\otimes\underline{x})+R, \\ & = & P\otimes 1+1\otimes P+R, \end{array}$$

où le reste R est égal à

$$\text{(II.33)}\qquad \sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\Bigg(\sum_{\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle\in=\widetilde{C}_{\underline{x}}} \underline{x}^1\otimes\underline{x}^2\Bigg).$$

Par définition, $\displaystyle\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\underline{x}$ est un élément primitif si et seulement si $R=0$.

Soit $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ un couple de suites de (II.33). Par la proposition II.1, l'ensemble des mots $\underline{x}\in X^{*,r}$ engendrant ce couple, i.e. tel que ce couple apparaît dans $C_{\underline{x}}$, est obtenu par battage de $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$. En regroupant dans (II.33) les termes avec le même couple $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$, on réecrit (II.33) comme somme d'éléments de la forme

$$\text{(II.34)}\qquad \Bigg(\sum_{\underline{x}\in\mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} M^{\underline{x}}\Bigg)\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2.$$

Le reste dans (II.32) est donc nul si et seulement si on a la condition (II.30). □

Théorème II.1. — *Un élément $P=\displaystyle\sum_{X^*} M^{\underline{x}}\underline{x}\in\mathbb{A}$ est un élément primitif si et seulement si le moule associé $M^\bullet$ est un moule alternal.*

Démonstration. — On peut écrire P comme somme de composantes homogènes $P=\displaystyle\sum_{n\le 0} P_n$. Or, si P_n est primitif pour chaque $n\le 0$, on a

$$\text{(II.35)}\qquad \Delta(P)=\sum_{n\le 0}\Delta(P_n)=\sum_{n\le 0}(P_n\otimes 1+1\otimes P_n)=P\otimes 1+1\otimes P_n,$$

donc P est primitif. Inversement, si P est primitif, on a

$$\text{(II.36)}\qquad \begin{array}{rcl} \Delta(P) & = & P\otimes 1+1\otimes P=\displaystyle\sum_{n\le 0}\Delta(P_n) \\ & = & \displaystyle\sum_{n\le 0}(P_n\otimes 1+1\otimes P_n+R_n) \\ & = & P\otimes 1+1\otimes P+\displaystyle\sum_{n\le 0}R_n. \end{array}$$

Donc $\sum_{n\le 0}R_n=0$, et comme il s'agit d'une série formelle non commutative, chaque partie homogène $R_n=0$. On obtient donc $\Delta(P_n)=P_n\otimes 1+1\otimes P_n$ pour tout $n\ge 0$, i.e. P_n est primitif.

On peut donc raisonner composante homogène par composante homogène.

Supposons donc P primitif ; alors chaque P_n est primitif, et par le théorème II.3, la partie homogène $M_n^\bullet$ du moule $M^\bullet$ est alors alternal. Donc $M^\bullet$ est alternal. Inversement, si $M^\bullet$ est alternal, alors chaque $M_n^\bullet$ l'est, donc chaque P_n est primitif, donc P est primitif. □

4.2. Écriture dans l'algèbre de Lie. — Rappelons que l'algèbre associative $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ s'identifie avec l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}_X$ sur l'alphabet X ; on a un homomorphisme injectif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_X & \longrightarrow & \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle \\ x & \mapsto & x, \\ [x,x'] & \mapsto & x\,x' - x'\,x. \end{array} \tag{II.37}$$

Par le théorème I.1, les éléments primitifs de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont exactement les éléments dans l'image de $\mathcal{L}_X$. Les moules alternaux de $\mathbb{A}$ peuvent donc être vu comme des éléments de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}_X$. Nous en donnons l'expression explicite dans le théorème suivant.

Rappelons d'abord quelques faits de la section I.1. Soit $\mathcal{M}$ l'idéal $\mathcal{M}$ de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ engendré par les séries formelles sans terme constant. Alors nous avons un homomorphisme, que l'on définit sur les monômes et étend par linéarité :

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{M} & \to & \mathcal{L}_X \\ x_1\cdots x_r & \mapsto & \frac{1}{r}[[\cdots[[x_1,x_2],x_3],\ldots,x_{r-1}],x_r]. \end{array} \tag{II.38}$$

Or, l'inclusion naturelle $\mathcal{L}_X \subset k\langle\langle X\rangle\rangle$ donne en fait $\mathcal{L}_X \subset \mathcal{M}$. Le théorème de projection I.2 (voir section I.1) dit que

$$\psi|_{\mathcal{L}_X} = \mathrm{id}_{\mathcal{L}_X}.$$

Théorème II.2. — *Soit $M^\bullet$ un moule alternal et $\underline{x}$ une suite de longueur $r > 0$. Soit $\sigma(\underline{x})$ l'ensemble des suites de longueur r déduites de $\underline{x}$ par permutation des composantes.*

Alors l'élément $\sum_{\underline{u}\in\sigma(\underline{x})} M^{\underline{u}}\underline{u}$ appartient à $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{M} \subset \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$, et s'écrit

$$\frac{1}{r}\sum_{\underline{u}\in\sigma(\underline{x})} M^{\underline{u}}[\underline{u}] \in \mathcal{L}_{\mathcal{X}}, \tag{II.39}$$

où

$$[x_1\cdots x_r] = [[\cdots[[x_1,x_2],x_3],\ldots,x_{r-1}],x_r]. \tag{II.40}$$

Démonstration. — Comme $M^\bullet$ est alternal, il est primitif, c'est-à-dire $\sum_{\underline{u}\in\sigma(\underline{x})} M^{\underline{u}}\underline{u} \in \mathcal{L}_X$, et le résultat découle alors immédiatement de (II.38) et du théorème de projection. □

Remarque II.1. — *Dans les applications du calcul moulien, ce n'est pas ce théorème que nous utiliserons, mais sa contrepartie dans le cas où l'algèbre sous-jacente est liée. Par exemple, soit* $\mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle$ *la bigèbre introduit au §I.2.3. Un élément* $P \in \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle$ *s'écrit*

$$P = \sum_{\underline{a}} P^{\underline{a}} D_{\underline{a}}, \tag{II.41}$$

où $D_{\underline{a}} = D_{a_n} \circ D_{a_{n-1}} \circ \cdots \circ D_{a_1}$.

Pour savoir si P *est primitif pour le coproduit* Δ *de* $\mathbb{K}\langle\langle \mathrm{Der}(A)\rangle\rangle$, *on associe à* P *son "représentant" libre, notée* P_l, *défini par*

$$P_l = \sum_{\underline{a}} P^{\underline{a}} \underline{a} \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle. \tag{II.42}$$

Le théorème II.1 s'applique et on a : si le moule $M^\bullet$ *est alternal, alors l'élément* $P = \sum M^\bullet X_\bullet$ *est primitif.*

Evidemment, on ne capte pas de cette façon tous les éléments primitifs.

Considérons les séries formelles non commutatives construites sur l'alphabet à trois lettres $\{D_1, D_2, D_3\}$, *où* D_1, D_2 *et* D_3 *sont trois dérivations sur une algèbre* A *telles que*

$$D_2 = D_1 + D_2. \tag{II.43}$$

Alors, l'élément

$$D_2 D_1 - D_1 D_1 - D_1 D_3 \tag{II.44}$$

est primitif, sans que le moule associé soit alternal.

En effet, cet élément est associé au moule $M^\bullet$ *défini par*

$$M^{2,1} = 1,\ M^{1,1} = -1,\ M^{1,3} = -1 \text{ et } M^\bullet = 0 \text{ sinon.} \tag{II.45}$$

Ce moule n'est pas alternal car on a

$$M^{2,1} + M^{1,2} = 1. \tag{II.46}$$

Pourtant, comme

$$D_2 D_1 - D_1 D_1 - D_1 D_3 = D_3 D_1 - D_1 D_3, \tag{II.47}$$

c'est bien un élément primitif.

Jean Écalle utilise constamment ce va-et-vient entre les objets construits sur des algèbres liées et leurs représentations libres.

4.3. Éléments primitifs de $\mathbb{E}$. —

Définition II.9. — *Un moule $M^\bullet$ est dit alternel si*

$$\sum_{\underline{y}\in \mathrm{csh}(\underline{y}^1,\underline{y}^2)} M^{\underline{y}} = 0 \quad \forall \underline{y}^1, \underline{y}^2 \in Y^* \setminus \{\emptyset\}. \tag{II.48}$$

Plaçons-nous maintenant dans la cogèbre $\mathbb{E}$, d'algèbre sous-jacente égale à $\mathbb{K}\langle\langle Y\rangle\rangle$ sur l'alphabet libre Y indexé par le semigroupe $\mathbb{N}$. On a alors le théorème suivant, analogue du théorème II.2 :

Théorème II.3. — *Un élément $\displaystyle\sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}}\underline{y} \in \mathbb{E}$ est primitif si et seulement si $M^\bullet$ est un moule alternel.*

Démonstration. — On note $P = \displaystyle\sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}}\underline{y}$. P primitif signifie que

$$\Delta_*(P) = P\otimes 1 + 1\otimes P. \tag{II.49}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_*(P) &= \sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}}\ \Delta_*(\underline{y}) \\
&= \sum_{y_{s_1}\dots y_{s_r}\in Y^*} M^{y_{s_1}\dots y_{s_r}}\ \Delta_*(y_{s_1}\dots y_{s_r}) \\
&= \sum_{y_{s_1}\dots y_{s_r}\in Y^*} M^{y_{s_1}\dots y_{s_r}}\ \Delta_*(y_{s_1})\dots\Delta_*(y_{s_r}) \\
&= \sum_{y_{s_1}\dots y_{s_r}\in Y^*} M^{y_{s_1}\dots y_{s_r}} \left(\sum_{k_1+l_1=s_1} y_{k_1}\otimes y_{l_1}\right)\cdots\left(\sum_{k_r+l_r=s_r} y_{k_r}\otimes y_{l_r}\right) \\
&= \sum_{y_{s_1}\dots y_{s_r}\in Y^*} M^{y_{s_1}\dots y_{s_r}} \sum_{k_i+l_i=s_i,\ 1\le i\le r} y_{k_1}\dots y_{k_r}\otimes y_{l_1}\dots y_{l_r}.
\end{aligned} \tag{II.50}$$

Ici, par la définition de Δ_*, les y_{k_i} et y_{l_i} appartiennent à $Y\cup\{\emptyset\}$, c'est-à-dire que la somme porte sur l'ensemble des r-uples de couples $\Big((y_{k_1},y_{l_1}),\dots,(y_{k_r},y_{l_r})\Big)$ avec $k_i+l_i=s_i$ restants.

Soit A l'ensemble de ces r-uples de couples, moins les deux éléments suivants :

$$\Big((y_{k_1},y_{l_1}),\dots,(y_{k_r},y_{l_r})\Big) = \Big((y_{s_1},\emptyset),\dots,(y_{s_r},\emptyset)\Big) \tag{II.51}$$

et

$$\Big((y_{k_1},y_{l_1}),\dots,(y_{k_r},y_{l_r})\Big) = \Big((\emptyset,y_{s_1}),\dots,(\emptyset,y_{s_r})\Big). \tag{II.52}$$

L'expression de $\Delta_*(P)$ donnée dans la dernière ligne de (II.50) devient alors

$$\begin{aligned}\Delta_*(P) &= \sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}}\underline{y}\otimes 1 + \sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}} 1\otimes \underline{y} \\ &\quad + \sum_{\underline{y}\in Y^*}\sum_{A} y_{k_1}\dots y_{k_r}\otimes y_{l_1}\dots y_{l_r}, \\ &= P\otimes 1 + 1\otimes P + R,\end{aligned} \tag{II.53}$$

où

$$R = \sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}} \sum_{A} y_{k_1}\dots y_{k_r}\otimes y_{l_1}\dots y_{l_r}. \tag{II.54}$$

P est donc primitif si et seulement si $R=0$.

Posons $\underline{y}^1 = y_{k_1}\dots y_{k_r}$ et $\underline{y}^2 = y_{l_1}\dots y_{l_r}$; notons que, contrairement aux apparences, les longueurs de $\underline{y}^1$ et $\underline{y}^2$ ne sont pas forcément égales à r puisque l'on ignore les composantes égales à $\emptyset$. La proposition II.2 dit qu'un couple $\langle \underline{y}^1;\underline{y}^2\rangle$ appartient à $C^*_{\underline{y}}$ si et seulement si $\underline{y}\in \mathrm{csh}(\underline{y}^1,\underline{y}^2)$.

On voit donc que le coefficient de chaque expression $\underline{y}^1\otimes\underline{y}^2$ dans la somme R est égal à

$$\sum_{\underline{y}\in \mathrm{csh}(\underline{y}^1,\underline{y}^2)} M^{\underline{y}}. \tag{II.55}$$

R s'annule donc si et seulement si $M^\bullet$ est alternel. □

5. Éléments "group-like" de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$

5.1. Éléments "group-like" de $\mathbb{A}$. — Rappelons de la définition I.3 qu'un élément $P\in\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ est dit "group-like" pour le coproduit $\Delta:\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle\to\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ s'il vérifie

$$\Delta(P) = P\otimes P. \tag{II.56}$$

Deux observations permettent de préciser la nature des éléments group-like de $\mathbb{E}$.

- Aucun polynôme ne peut vérifier (II.56). En effet, définissons la "longueur" d'un produit tensoriel $P_1\otimes P_2$ de deux monômes comme étant la somme $n+m$ où n est la longueur de P_1 en tant que monôme et m la longueur de P_2. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, et soit M le monôme le plus long apparaissant dans P. Alors on voit que la longueur de chaque terme apparaissant dans $\Delta(P)$ est inférieure ou égale à la longueur de M, alors que le terme $M\otimes M$, deux fois trop long, apparaît dans $P\otimes P$. Ceci montre que si un élément de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ a une chance d'être group-like, il doit s'agir d'une série formelle.

- De même, $\Delta(P)$ fait apparaitre des couples $(1,\underline{x})$ ou $(\underline{x},1)$, ce qui n'est possible dans $P\otimes P$ que si on fait intervenir la suite vide. La série P doit donc avoir un terme constant $a\neq 0$. La condition $\Delta(P)=P\otimes P$ implique alors que ce terme constant vérifie $a(1\otimes 1)=a\otimes a$, donc $a=1$.

Ces deux observations nous conduisent à considérer les moules de la forme

$$P=\sum_{\underline{x}\in X^*} M^{\underline{x}}\underline{x}, \tag{II.57}$$

avec $M^{\emptyset}=1$.

Remarque II.2. — *Si les dérivations proviennent d'un champ de vecteurs, le groupe des automorphismes ainsi défini est isomorphe au groupe des difféomorphismes tangents à l'identité.*

Définition II.10. — *Un moule $M^{\bullet}$ est dit symétral si*

$$\sum_{\underline{x}\in \mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} M^{\underline{x}}=M^{\underline{x}^1}M^{\underline{x}^2}\qquad \forall \underline{x}^1,\underline{x}^2\in X^*. \tag{II.58}$$

Théorème II.4. — *Un élément $\sum_{\underline{x}} M^{\underline{x}}\underline{x}\in\mathbb{A}$ est "group-like" si et seulement si $M^{\bullet}$ est un moule symétral.*

Démonstration. — Soit $P=1+Q=1+\sum_{\underline{\omega}\neq\emptyset} M^{\underline{x}}\underline{x}$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= 1\otimes 1+\sum_{\underline{x}\in X^*} M^{\underline{x}}\Delta(\underline{x})\\ &= 1\otimes 1+Q\otimes 1+1\otimes Q+\sum_{\underline{x}\in X^{*,r}} M^{\underline{x}}\cdot\sum_{\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle\in\widetilde{C}_{\underline{x}}}\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2,\end{aligned} \tag{II.59}$$

où l'on rappelle que $C_{\underline{x}}$ dénote l'ensemble de couples $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ apparaissant dans la somme $\Delta(\underline{x})$, et $\widetilde{C}_{\underline{x}}$ dénote le sous-ensemble des couples avec $\underline{x}^1\neq\emptyset$, $\underline{x}^2\neq\emptyset$.

On a aussi

$$P\otimes P=1\otimes 1+Q\otimes 1+1\otimes Q+Q\otimes Q,$$

où

$$Q\otimes Q=\sum_{\underline{x}^1\neq\emptyset,\underline{x}^2\neq\emptyset} M^{\underline{x}^1}M^{\underline{x}^2}\underline{x}^1\otimes\underline{x}^2. \tag{II.60}$$

Pour que P soit group-like, il faut donc que le reste de (II.59) soit égal à (II.60).

Soit $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ un couple de suites intervenant dans (II.60). Rappelons de la proposition II.1, §3.1, que ce couple $\langle\underline{x}^1;\underline{x}^2\rangle$ appartient à $C_{\underline{x}}$ si et seulement si $\underline{x}$ appartient à $\mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$.

Pour un couple donné $\langle \underline{x}^1; \underline{x}^2\rangle$, le coefficient du terme $\underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2$ dans le reste de (II.59) est donc donné par

$$\sum_{\underline{x}\in \mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} M^{\underline{x}}.$$

Le reste de (II.59) est donc égal à (II.60), i.e. P est group-like, si et seulement si

$$\sum_{\underline{x}\in \mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} M^{\underline{x}} = M^{\underline{x}^1} M^{\underline{x}^2},$$

d'où le théorème. $\square$

5.2. Éléments "group-like" de $\mathbb{E}$. — La condition de symétrie d'un moule correspondant au fait d'être group-like dans $\mathbb{E}$ est donc :

Définition II.11. — *Un moule $M^\bullet$ est dit symétrel si*

$$\sum_{\underline{y}\in \mathrm{csh}(\underline{y}^1,\underline{y}^2)} M^{\underline{y}} = M^{\underline{y}^1} M^{\underline{y}^2} \qquad \forall \underline{y}^1, \underline{y}^2 \in Y^*. \tag{II.61}$$

Théorème II.5. — *Un élément* $\sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}}\underline{y} \in \mathbb{E}$ *est "group-like" si et seulement si* $M^\bullet$ *est un moule symétrel.*

Démonstration. — Elle est analogue au cas symétral. En effet, il suffit d'adapter la démonstration du théorème II.4 en remplaçant (II.59) par

$$\begin{aligned}\Delta_*(P) &= 1\otimes 1 + \sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}} \Delta_*(\underline{y}) \\ &= 1\otimes 1 + Q\otimes 1 + 1\otimes Q + \sum_{\underline{y}\in Y^*} M^{\underline{y}} \quad \cdot \sum \underline{y}^1 \otimes \underline{y}^2,\end{aligned} \tag{II.62}$$

où la deuxième somme porte sur tous les couples $\langle \underline{y}^1; \underline{y}^2\rangle$ tels que

– $\underline{y}^1 = y_{k_1}\dots y_{k_r}$, $\underline{y}^2 = y_{l_1}\dots y_{l_r}$ avec éventuellement certains y_{k_i} ou y_{l_i} égaux à $\emptyset$;
– $k_i + l_i = s_i$ pour $1 \le i \le r$ si $\underline{y} = y_{s_1}\dots y_{s_r}$
– $\underline{y}^1 \neq \emptyset$ et $\underline{y}^2 \neq \emptyset$.

Par la proposition II.2, le coefficient d'un terme donné $\underline{y}^1 \otimes \underline{y}^2$ est donné par

$$\sum_{\underline{y}\in \mathrm{csh}(\underline{y}^1,\underline{y}^2)} M^{\underline{y}}. \tag{II.63}$$

Comparant donc le reste de (II.62) avec (II.60), on voit que P est group-like si et seulement si le moule associé $M^\bullet$ est symétrel. $\square$

6. Exemples de moules alterna(e)l, symétra(e)l

6.1. Un moule alternal. — Dans cet exemple, nous prenons pour Ω un ensemble dénombrable d'indéterminées, et pour le corps $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(\Omega)$ des fractions rationnelles dans les éléments de Ω.

On définit le moule élémentaire $T^\bullet$ par

$$\begin{aligned} &T^{\emptyset}=0, \quad T^{\omega}=0 \ \ \forall \omega\in\Omega,\\ &T^{(\omega_1,\dots,\omega_r)}=\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)}\cdot\cdot\frac{1}{(\omega_3-\omega_2)}\cdot\dots\cdot\frac{1}{(\omega_r-\omega_{r-1})},\ r\geq 2. \end{aligned} \tag{II.64}$$

On a

Lemme II.4. — *Le moule $T^\bullet$ est alternal.*

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur des suites. On doit vérifier pour toutes suites $\underline{\omega}^1\neq\emptyset$, $\underline{\omega}^2\neq\emptyset$, la propriété

$$\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} T^{\underline{\omega}}=0.$$

La propriété est trivialement vraie si $l(\underline{\omega})=2$.

Soient $\underline{\omega}^1=(\omega_1^1,\dots,\omega_n^1)$ et $\underline{\omega}^2=(\omega_1^2,\dots,\omega_m^2)$ telles que $n+m=r>2$. Supposons que la propriété d'alternalité soit vraie pour toutes les suites de longueur $\leq r-1$.

On commence par noter que

$$T^{(\omega_1,\dots,\omega_r)}=\frac{1}{(\omega_r-\omega_{r-1})}T^{(\omega_1,\dots,\omega_{r-1})}. \tag{II.65}$$

On a de plus la propriété suivante du battage de deux suites :

Lemme II.5. — *L'ensemble $sh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$ est la réunion disjointe des quatre ensembles suivants :*

$$\Big(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{\leq m-2}),\omega^2_{m-1},\omega^2_m\Big)\coprod\Big(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_n,\omega^2_m\Big)\coprod$$
$$\Big(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^2_m,\omega^1_n\Big)\coprod\Big(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-2},\underline{\omega}^2),\omega^1_{n-1},\omega^1_n\Big),$$

où $\underline{\omega}_{\leq j}$ dénote la sous-suite $(\omega_1,\dots,\omega_j)$ des j premières composantes de $\underline{\omega}$.

Démonstration. — Soit $\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$. Alors $l(\underline{\omega})=r$, et on peut se demander que peuvent être les deux dernières composantes de ω. Comme le battage ne mélange pas l'ordre interne des composantes de $\underline{\omega}^1$ et de $\underline{\omega}^2$, on voit que les deux dernières composantes de $\underline{\omega}$, en l'ordre, doivent former l'un des couples suivants : $(\omega^1_{n-1},\omega^1_n)$, $(\omega^2_{m-1},\omega^2_m)$, (ω^1_n,ω^2_m),

(ω^2_m,ω^1_n). Les $r-2$ premières composantes de $\underline{\omega}$ sont donc forcément obtenues par battage des composantes restantes de $\underline{\omega}^1$ et $\underline{\omega}^2$, ce qui démontre le résultat. $\square$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} T^{\underline{\omega}} &= \frac{1}{(\omega^2_m-\omega^2_{m-1})}\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{\leq m-2}),\omega^2_{m-1}\right)} T^{\underline{s}}\\ &+\frac{1}{(\omega^2_m-\omega^1_n)}\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_n\right)} T^{\underline{s}}\\ &+\frac{1}{(\omega^1_n-\omega^2_m)}\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^2_m\right)} T^{\underline{s}}\\ &+\frac{1}{(\omega^1_n-\omega^1_{n-1})}\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-2},\underline{\omega}^2),\omega^1_{n-1}\right)} T^{\underline{s}}.\end{aligned}\tag{II.66}$$

Par ailleurs, le moule $T^\bullet$ étant alternal jusqu'à l'ordre $r-1$, on a les égalités :

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{\leq m-2}),\omega^2_{m-1}\right)} T^{\underline{s}}+\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_n\right)} T^{\underline{s}}=0,\\ \sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^2_m\right)} T^{\underline{s}}+\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-2},\underline{\omega}^2),\omega^1_{n-1}\right)} T^{\underline{s}}=0.\end{aligned}\tag{II.67}$$

L'équation (II.66) peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} T^{\underline{\omega}} = \left[\frac{1}{\omega^2_m-\omega^1_n}-\frac{1}{\omega^2_m-\omega^2_{m-1}}\right]\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_n\right)} T^{\underline{s}}\\ +\left[\frac{1}{\omega^1_n-\omega^2_m}-\frac{1}{\omega^1_n-\omega^1_{n-1}}\right]\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^2_m\right)} T^{\underline{s}}.\end{aligned}\tag{II.68}$$

On décompose les deux sommes sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_n\right)} T^{\underline{s}} &= \sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-2},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_{n-1}\omega^1_n\right)} T^{\underline{s}}+\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-2}),\omega^2_{m-1}\omega^1_n\right)} T^{\underline{s}},\\ \sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^2_m\right)} T^{\underline{s}} &= \sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-2},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_{n-1}\omega^2_m\right)} T^{\underline{s}}+\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-2}),\omega^2_{m-1}\omega^2_m\right)} T^{\underline{s}}..\end{aligned}\tag{II.69}$$

On note

$$A=\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-2},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),\omega^1_{n-1}\right)} T^{\underline{s}},\quad B=\sum_{\underline{s}\in\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-2}),\omega^2_{m-1}\right)} T^{\underline{s}}.\tag{II.70}$$

L'équation (II.68) s'écrit donc

$$
\begin{aligned}
\text{(II.71)} \quad & \sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} T^{\underline{\omega}} = A\left[\frac{1}{(\omega^2_{m-1}-\omega^2_m)(\omega^1_{n-1}-\omega^2_m)} + \frac{1}{(\omega^1_{n-1}-\omega^1_n)(\omega^1_{n-1}-\omega^1_n)}\right] \\
& +B\left[\frac{1}{(\omega^2_{m-1}-\omega^2_m)(\omega^2_{m-1}-\omega^2_m)} + \frac{1}{(\omega^1_{n-1}-\omega^1_n)(\omega^2_{m-1}-\omega^1_n)}\right].
\end{aligned}
$$

Par hypothèse d'alternalité de $T^\bullet$ jusqu'à l'ordre $r-1$, on a

$$A+B=0, \tag{II.72}$$

soit, en notant $C_A(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$ et $C_B(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$ les coefficients de A et B dans (II.71),

$$\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} T^{\underline{\omega}} = A(C_A(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2) - C_B(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)). \tag{II.73}$$

Un simple calcul donne $C_A(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2) - C_B(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)=0$, d'où le résultat. □

6.2. Un moule alternel. — Le moule alternel le plus simple est défini par $J^{\emptyset}=0$ et pour toute suite $\underline{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_r)$ par

$$J^{\underline{\omega}} = \frac{(-1)^{r+1}}{r}.$$

Lemme II.6. — *Le moule $J^\bullet$ est alternel.*

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur des suites. Pour $\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$, on a

$$J^{\omega_1,\omega_2} + J^{\omega_2,\omega_1} + J^{\omega_1+\omega_2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

La propriété d'alternélité est donc vérifiée pour les suites de longueur 2. Pour les suites de longueur ≥ 3, on note la propriété suivante du battage contractant :

Lemme II.7. — *Pour toutes suites $\underline{\omega}^1$ et $\underline{\omega}^2$ avec $l(\underline{\omega}^1)=n>0$ et $l(\underline{\omega}^2)=m>0$, l'ensemble $csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$ est la réunion disjointe des trois ensembles suivants :*

$$\big(csh(\underline{\omega}^1_{n-1},\underline{\omega}^2),\omega^1_n\big)\coprod\big(csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{m-1}),\omega^2_m\big)\coprod\big(csh(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2_{\leq m-1}),(\omega^1_n+\omega^2_m)\big).$$

Démonstration. — Comme pour le lemme II.5, il suffit de constater que toute suite appartenant à $csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$ a comme dernière composante soit ω^1_n, soit ω^2_m, soit la somme des deux. □

On a aussi

$$\sum_{\underline{s}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} J^{\underline{s}} = -\frac{(r-1)}{r}\sum_{\underline{s}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} J^{\underline{s}_{\leq r-1}}.$$

On déduit donc du lemme II.6 l'égalité

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{\underline{s}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} J^{\underline{s}} & = & \displaystyle -\frac{(r-1)}{r}\left(\sum_{\underline{s}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^{2,<n-1})} J^{\bullet} + \sum_{\underline{s}\in csh(\underline{\omega}^{1,<m-1},\underline{\omega}^2)} J^{\bullet}\right)\\ & & \displaystyle +\frac{(r-2)}{r-1}\sum_{\underline{s}\in csh(\underline{\omega}^{1,<m-1},\underline{\omega}^{2,<n-1})} J^{\bullet}.\end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, ces trois sommes sont nulles, d'où le résultat. □

6.3. Un moule symétral. — On définit le moule $S^{\bullet}$ par $S^{\emptyset}=1$ et

$$S^{\omega_1\ldots\omega_r} = \frac{(-1)^r}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\ldots(\omega_1+\cdots+\omega_r)}. \tag{II.74}$$

On a

Lemme II.8. — *Le moule $S^{\bullet}$ est symétral.*

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur des suites. On doit vérifier pour toutes suites $\underline{\omega}^1$, $\underline{\omega}^2$, la propriété

$$\sum_{\underline{\omega}\in sh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} S^{\underline{\omega}} = S^{\underline{\omega}^1}S^{\underline{\omega}^2}.$$

La propriété est vraie si $l(\underline{\omega})=2$. En effet, on a

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{\underline{\omega}\in sh(\omega_1,\omega_2)} S^{\underline{\omega}} & = & S^{\omega_1\omega_2}+S^{\omega_2\omega_1},\\ & = & \displaystyle\frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)}+\frac{1}{\omega_2(\omega_1+\omega_2)},\\ & = & \displaystyle\frac{1}{\omega_1\omega_2} = S^{\omega_1}S^{\omega_2}.\end{array} \tag{II.75}$$

Soient $\underline{\omega}^1=(\omega_1^1,\ldots,\omega_n^1)$ et $\underline{\omega}^2=(\omega_1^2,\ldots,\omega_m^2)$ deux suites telles que $l(\underline{\omega}^1)+l(\underline{\omega}^2)=r$, $r>2$. Supposons que la propriété de symétralité soit vraie pour toutes les suites de longueur $\leq r-1$.

On commence par noter que

$$S^{\underline{\omega}=\omega_1\ldots\omega_r} = \frac{1}{\parallel\underline{\omega}\parallel}S^{\underline{\omega}_{<r-1}}, \tag{II.76}$$

où $\parallel\underline{\omega}\parallel=\omega_1+\cdots+\omega_r$.

On a de plus la propriété suivante du battage de deux suites :

Lemme II.9. — *Pour toutes suites $\underline{\omega}^1$ et $\underline{\omega}^2$ avec $l(\underline{\omega}^1)=n>0$ et $l(\underline{\omega}^2)=m>0$, l'ensemble $\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)$ est la réunion disjointe des deux ensembles suivants :*

$$\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{<m-1})\omega_m^2\right)\coprod\left(\mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{<n-1},\underline{\omega}^2)\omega_n^1\right). \tag{II.77}$$

La démonstration est laissée au lecteur. On a donc

$$\text{(II.78)}\qquad \begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} S^{\underline{\omega}} &= \frac{-1}{\parallel \omega \parallel} \sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} S^{\underline{\omega}_{<r-1}},\\ &= -\frac{1}{\parallel \omega \parallel} \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1_{<n-1},\underline{\omega}^2)} S^{\underline{s}} - \frac{1}{\parallel \omega \parallel} \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{<m-1})} S^{\underline{s}}.\end{aligned}$$

Comme $l(\underline{s}) = r-1$, on en déduit par hypothèse de récurrence,

$$\text{(II.79)}\qquad \begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} S^{\underline{\omega}} &= -\frac{1}{\parallel \omega \parallel} S^{\underline{\omega}^1_{<n-1}} S^{\underline{\omega}^2} - \frac{1}{\parallel \omega \parallel} S^{\underline{\omega}^1} S^{\underline{\omega}^2_{<m-1}},\\ &= \frac{\parallel \underline{\omega}^1 \parallel}{\parallel \omega \parallel} S^{\underline{\omega}^1} S^{\underline{\omega}^2} + \frac{\parallel \underline{\omega}^2 \parallel}{\parallel \omega \parallel} S^{\underline{\omega}^1} S^{\underline{\omega}^2},\end{aligned}$$

en utilisant la relation (II.76). En simplifiant, on obtient finalement,

$$\text{(II.80)}\qquad \begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} S^{\underline{\omega}} &= \frac{\parallel \underline{\omega}^1 \parallel + \parallel \underline{\omega}^2 \parallel}{\parallel \omega \parallel} S^{\underline{\omega}^1} S^{\underline{\omega}^2},\\ &= S^{\underline{\omega}^1} S^{\underline{\omega}^2},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

6.4. Un moule symétrel. — On définit le moule

$$\text{(II.81)}\qquad Se^{\omega_1\dots\omega_r} = \frac{e^{\|\underline{\omega}\|}}{(e^{-\omega_1}-1)\dots(e^{-\|\underline{\omega}_{<i}\|}-1)(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)},$$

où $\underline{\omega}_{<i} = \omega_1 \dots \omega_i$.

Lemme II.10. — *Le moule $Se^{\bullet}$ est symétrel.*

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur des séquences. On commence par noter que

$$\text{(II.82)}\qquad Se^{\underline{\omega}} = \frac{e^{\omega_r}}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}_{<r-1}}.$$

D'après le lemme II.6, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} Se^{\underline{\omega}} &= \sum_{\underline{\omega}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{<r-1})\omega_r^2} Se^{\underline{\omega}} + \sum_{\underline{\omega}\in csh(\underline{\omega}^1_{<m-1},\underline{\omega}^2)\omega_1} Se^{\underline{\omega}}\\ &+ \sum_{\underline{\omega}\in csh(\underline{\omega}^1_{<m-1},\underline{\omega}^2_{<r-1})(\omega_1^m+\omega_2^r)} Se^{\underline{\omega}},\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (II.82),

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{\omega}\in csh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} Se^{\underline{\omega}} &= \frac{e^{\omega_r^2}}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}^1} Se^{\underline{\omega}^2_{<r-1}} + \frac{e^{\omega_m^1}}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}^{1,<m-1}} Se^{\underline{\omega}^2} \\
&\quad + \frac{e^{\omega_m^1+\omega_r^2}}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}^{1,<m-1}} Se^{\underline{\omega}^{2,<r-1}}, \\
&= \frac{e^{-\|\omega^2\|}-1}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}^1} Se^{\underline{\omega}^2} + \frac{e^{-\|\omega^1\|}-1}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}^1} Se^{\underline{\omega}^2} \\
&\quad + \frac{(e^{-\|\omega^1\|}-1)(e^{-\|\omega^2\|}-1)}{(e^{-\|\underline{\omega}\|}-1)} Se^{\underline{\omega}^1} Se^{\underline{\omega}^2}, \\
&= Se^{\underline{\omega}^1} Se^{\underline{\omega}^2}.
\end{aligned}$$

On a donc le lemme. $\square$

PARTIE III
ALGÈBRE À COMPOSITION DES MOULES

La correspondance entre moules et séries formelles non commutatives permet de munir l'ensemble des moules d'une structure d'algèbre non commutative. On introduit aussi une opération, appellée *composition*, et qui est l'analogue *non commutatif* de la substitution des séries formelles. Cette opération n'existe pas dans les travaux combinatoires usuels, comme par exemple dans l'étude des algèbres de Hopf. On introduit aussi les groupes alterna(e)l et symetra(e)l.

1. Structure d'algèbre

Soit X un ensemble d'éléments X_ω indicés par un semi-groupe Ω. On suppose X muni d'un coproduit noté Δ. On note $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ l'algèbre des séries formelles non commutatives formées sur X muni du coproduit Δ. On note $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ l'ensemble des moules sur Ω. La structure d'algèbre de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ se traduit directement sur les moules.

Soient $\sum_\bullet M^\bullet D_\bullet$ et $\sum_\bullet N^\bullet D_\bullet$ deux éléments de $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. On définit l'addition et la multiplication de deux moules via les relations

$$\begin{aligned} \sum_\bullet M^\bullet D_\bullet + \sum_\bullet N^\bullet D_\bullet &= \sum_\bullet (M^\bullet + N^\bullet) D_\bullet, \\ \left(\sum_\bullet N^\bullet D_\bullet\right)\left(\sum_\bullet M^\bullet D_\bullet\right) &= \sum_\bullet (M^\bullet \times N^\bullet) D_\bullet. \end{aligned} \tag{III.1}$$

On peut donc munir $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ de la structure d'algèbre suivante :

Théorème III.1. — *L'ensemble des moules $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ muni des opérations*

$$\begin{aligned} A^\bullet = M^\bullet + N^\bullet &\iff A^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}} + N^{\underline{\omega}} \\ A^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet &\iff A^{\underline{\omega}} = \sum_{\underline{\omega}^1 \bullet \underline{\omega}^2 = \underline{\omega}} M^{\underline{\omega}^1} N^{\underline{\omega}^2}, \end{aligned}$$

est une algèbre non commutative.

L'élément neutre pour la multiplication est le moule $1^\bullet$ défini par

$$1^\omega = 1 \text{ si } \omega = \emptyset \text{ et } 1^\omega = 0 \text{ sinon.}$$

On peut préciser la relation entre les moules alternaux et symétraux via le théorème I.3.

Définition III.1. — *Soit $M^\bullet$ un moule, on appelle exponentielle de $M^\bullet$ et on note $\exp(M^\bullet)$ la série $\exp(N^\bullet) = \sum \frac{(M^\bullet)^n}{n!}$, avec la convention $(M^\bullet)^0 = 1^\bullet$.*

Une simple application de la formule de Leibniz donne

Lemme III.1. — *Pour tout moule symétral $M^\bullet$ il existe un moule alternal $N^\bullet$ tel que $M^\bullet = \exp N^\bullet$.*

Démonstration. — Il suffit de voir que $\exp(\sum_\bullet N^\bullet D_\bullet) = \sum_\bullet \exp N^\bullet D_\bullet$ par définition du moule exponentielle. Le théorème I.3 permet de conclure. □

2. Composition

On peut munir l'algèbre des moules d'une composition. Cette loi de composition est l'analogue de la notion de *substitution* dans l'algèbre des séries formelles (voir [**7**], annexe 21, p.398-400).

Définition III.2. — *Soit Ω un semi-groupe. On note $\| \, . \, \|$ l'application de Ω dans Ω définie pour tout $\underline{\omega} = \omega_1 \dots \omega_r$ par*

$$\| \omega_1 \dots \omega_r \| = \omega_1 + \cdots + \omega_r. \tag{III.2}$$

Soit $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$. Le moule composé $A^\bullet = M^\bullet \circ N^\bullet$ est défini par

$$A^\omega = \sum_{s \geq 0, \omega^1 \dots \omega^s = \omega, \ \omega^i \neq \emptyset} M^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} N^{\omega^1} \dots N^{\omega^s}, \tag{III.3}$$

L'élément neutre pour la composition est le moule $I^\bullet$ défini par

$$I^\omega = 1 \text{ si } l(\omega) = 1 \text{ et } I^\omega = 0 \text{ sinon.} \tag{III.4}$$

Cette opération d'apparence compliquée, peut s'expliquer de la manière suivante :

Soient M et N les deux séries formelles associées aux moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} M^{\underline{\omega}} \underline{\omega}, \\ N &= \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} N^{\underline{\omega}} \underline{\omega}. \end{aligned} \tag{III.5}$$

L'application $\| \, . \, \|$ permet de construire un nouvel alphabet à partir de M :

À tout $\omega \in \Omega$, on associe la lettre

$$m_\omega = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*, \ \|\underline{\omega}\| = \omega} M^{\underline{\omega}} \underline{\omega}. \tag{III.6}$$

La série $N \circ M$ est alors définie comme suit :

$$N \circ M = \sum_{\underline{\omega}} N^{\underline{\omega}} m_{\underline{\omega}}. \tag{III.7}$$

Avec ces notations, nous avons le résultat suivant :

Lemme III.2. — *La série $N \circ M$ possède un développement moulien de la forme*

$$N \circ M = \sum_{\underline{\omega} \in \Omega^*} (N^\bullet \circ M^\bullet)^{\underline{\omega}} \underline{\omega}. \tag{III.8}$$

Démonstration. — Il suffit de développer l'expression (III.7). On a :

$$N \circ M = \sum_{\underline{\omega}} N^{\omega_1 \dots \omega_r} \left(\sum_{\underline{\omega}^1 \in \Omega^*,\ \|\underline{\omega}^1\| = \omega_1} M^{\underline{\omega}^1} \underline{\omega}^1 \right) \dots \left(\sum_{\underline{\omega}^r \in \Omega^*,\ \|\underline{\omega}^r\| = \omega_r} M^{\underline{\omega}^r} \underline{\omega}^r \right). \tag{III.9}$$

Soit $\underline{\omega} \in \Omega^*$ fixé. Le coefficient dans (III.9) pour toute décomposition

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^1 \dots \underline{\omega}^r, \tag{III.10}$$

de $\underline{\omega}$ est donné par

$$N^{\|\underline{\omega}^1\| \cdots \|\underline{\omega}^r\|} M^{\underline{\omega}^1} \dots M^{\underline{\omega}^r}, \tag{III.11}$$

ce qui termine la preuve. □

On a le théorème principal de cette section :

Théorème III.2. — *L'algèbre des moules muni des opérations* $(+, \times, \circ)$ *est une algèbre à composition, i.e.,*

$$\begin{array}{rcl} i)\ (M^\bullet + N^\bullet) \circ A^\bullet & = & (M^\bullet \circ A^\bullet) + (N^\bullet \circ A^\bullet), \\ ii)\ (M^\bullet \times N^\bullet) \circ A^\bullet & = & (M^\bullet \circ A^\bullet) \times (N^\bullet \circ A^\bullet). \end{array} \tag{III.12}$$

La démonstration repose sur des calculs élémentaires.

3. Groupe alterna(e)l et symétra(e)l

Dans les calculs pratiques sur les moules, il est commode de connaître le comportement de la propriété d'alternalité (resp. symétralité) vis à vis des lois de composition et de multiplication.

On commence par noter le simple résultat suivant :

Lemme III.3. — *L'ensemble des moules $M^\bullet$ tels que $M^\emptyset \neq 0$ forment un groupe, noté $M_\times(\Omega)$, dont les éléments sont les moules possèdant un inverse multiplicatif.*

Démonstration. — Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules dans $M_\times(\Omega)$. On note $A^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$. Par définition, on a $A^\emptyset = M^\emptyset N^\emptyset$. Comme $M^\emptyset \neq 0$ et $N^\emptyset \neq 0$, on en déduit $A^\emptyset \neq 0$.

La caractérisation des moules ayant un inverse se fait par récurrence sur la longueur des suites. Soit $M^\bullet$ un moule possèdant un inverse multiplicatif noté $N^\bullet$, alors on doit avoir $1^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$, soit

$$1^\omega = \sum_{\omega_1\omega_2=\omega} M^{\omega_1}N^{\omega_2}.$$

On a donc une récurrence pour déterminer le moule $N^\bullet$ via la relation

$$1^\omega = \sum_{\omega_1\omega_2=\omega,\ \omega_1\neq\emptyset} M^{\omega_1}N^{\omega_2} + M^\emptyset N^\omega.$$

La condition $\omega_1 \neq 0$ fait que les moules N^{ω_2} intervenant dans la somme sont associés à des suites de longueur inférieur à celle de ω. On peut donc trouver, de manière itérative, l'expression du moule $N^\bullet$ si et seulement si $M^\emptyset \neq 0$. □

Soit $M^\bullet \in M_\times(\Omega)$, on notera $(M^\bullet)^{-1}$ le moule inverse.

Lemme III.4. — *L'ensemble des moules $M^\bullet$ tel que $M^\emptyset = 0$ et $M^\omega \neq 0$ si $l(\omega) = 1$ forment un groupe, noté $M_\circ(\Omega)$, dont les éléments sont les moules possèdant un inverse pour la composition.*

Démonstration. — Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules dans $M_\circ(\Omega)$. On note $A^\bullet = M^\bullet \circ N^\bullet$. Par définition, on a $A^\emptyset = M^\emptyset N^\emptyset$. Comme $M^\emptyset = 0$ et $N^\emptyset = 0$, on en déduit $A^\emptyset = 0$. De plus, $A^\omega = M^\omega N^\omega$ si $l(\omega) = 1$. Comme $M^\omega \neq 0$ et $N^\bullet \neq 0$, on a $A^\omega \neq 0$, et $A^\bullet \in M_\circ(\Omega)$.

La caractérisation des moules ayant un inverse pour la composition se fait par récurrence sur la longueur des suites. Soit $M^\bullet$ un moule possèdant un inverse de composition noté $N^\bullet$, alors on doit avoir $I^\bullet = M^\bullet \circ N^\bullet$, soit

$$I^\omega = \sum_{r\geq 1}\sum_{\omega_1\ldots\omega_r=\omega} M^{\|\omega_1\|,\ldots,\|\omega_r\|}N^{\omega_1}\ldots N^{\omega_r}.$$

On a donc une récurrence pour déterminer le moule $N^\bullet$ via la relation

$$I^\omega = \sum_{r>1}\sum_{\|\omega_1\|,\ldots,\|\omega_r\|} N^{\omega_1}\ldots N^{\omega_r} + M^{\|\omega\|}N^\omega.$$

La condition $r > 1$ fait que les moules N^{ω_1}, ..., N^{ω_r} intervenant dans la somme sont associés à des suites de longueur inférieur à celle de ω. On peut donc trouver, de manière itérative, l'expression du moule $N^\bullet$ si et seulement si $M^{\|\omega\|} \neq 0$ pour tout ω, soit $M^\omega \neq 0$ lorsque $l(\omega) = 1$. □

Soit $M^\bullet \in M_\circ(\Omega)$, on notera $(M^\bullet)^{(-1)}$ le moule inverse.

Le résultat principal de cette section est :

Théorème III.3. — *Les ensembles $M_{sym}(\Omega)$ des moules symétrals, muni de la multiplication, et $M_{alt}(\Omega)$ des moules alternals, muni de la composition, sont des sous-groupes non distingués de $M_\times(\Omega)$ et $M_\circ(\Omega)$ respectivement.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme III.5. — *Soient $A^\bullet \in M_{sym}(\Omega)$, $B^\bullet \in M_{sym}(\Omega)$, $C^\bullet \in M_{alt}(\Omega)$ et $E^\bullet \in M_{alt}(\Omega)$, on a*

i) $(A^\bullet)^{-1} \in M_{sym}(\Omega)$, ii) $(C^\bullet)^{(-1)} \in M_{alt}(\Omega)$,
iii) $A^\bullet \times B^\bullet \in M_{sym}(\Omega)$, iv) $C^\bullet \circ E^\bullet \in M_{alt}(\Omega)$,
v) $B^\bullet \times C^\bullet \times (B^\bullet)^{-1} \in M_{alt}(\Omega)$.

Démonstration. — On peut démontrer i) et iii) en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff. Soit x et y deux éléments de $\hat{L}_X$, alors $\exp(x)\exp(y) = \exp z$, où $z \in \hat{L}_X$. Tout moule symétral s'obtient par le lemme III.1 comme exponentielle d'un moule alternal. La formule de Campbell-Hausdorff assure que $(\sum_\bullet A^\bullet D_\bullet)(\sum_\bullet B^\bullet D_\bullet) = (\sum_\bullet (A^\bullet \times B^\bullet) D_\bullet)$ s'écrit sous la forme $(\sum_\bullet \exp F^\bullet D_\bullet)$ où $F^\bullet$ est un moule alternal. Par définition, on a donc $\exp F^\bullet \in M_{sym}(\Omega)$.

De même, on obtient facilement $(A^\bullet)^{-1} \in M_{sym}(\Omega)$.

La propriété v) exprime la stabilité des dérivations via une conjugaison par un automorphisme de U. Elle est donc évidente.

Les propriétés ii) et iv) repose sur le fait que toute transformation associée à un moule alternal transforme un élément de $\hat{L}_X$ en un élément de $\hat{L}_X$. Elles découlent donc de la définition même de la composition des moules interprétée en terme d'opérateur dans le lemme III.2. □

On note $ret : \Sigma_\Omega \to \Sigma_\Omega$ l'involution, qui a toute suite $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ associe $ret\underline{\omega} = (\omega_n, \ldots, \omega_1)$.

Lemme III.6. — *L'inverse multiplicatif d'un moule symetral $M^{\underline{\omega}}$ est donné par*

$$(M^{\underline{\omega}})^{-1} = (-1)^{l(\underline{\omega})} M^{ret\underline{\omega}}.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur de $\underline{\omega}$. Pour simplifier l'écriture, on note $N^\bullet$ le moule inverse de $M^\bullet$.

Pour $\underline{\omega} = \emptyset$, on a $1 = M^\emptyset N^\emptyset$, d'où $N^\emptyset = 1$. Pour $\underline{\omega} = \omega_1$, on a $1^{\omega_1} = M^{\omega_1} N^\emptyset + M^\emptyset N^{\omega_1}$, d'où $N^{\omega_1} = -M^{\omega_1}$. Un calcul intéressant est donné par la longueur 2, qui fournit la clef de la démonstration. Pour $\underline{\omega} = \omega_1\omega_2$, on a $1^{\omega_1\omega_2} = M^{\omega_1\omega_2} N^\emptyset + M^{\omega_1} N^{\omega_2} + M^\emptyset N^{\omega_1\omega_2}$. En utilisant l'expression de N^{ω_1}, on obtient $0 = M^{\omega_1\omega_2} - M^{\omega_1} M^{\omega_2} + N^{\omega_1\omega_2}$. La propriété de symétralité de $M^\bullet$ permet de simplifier cette expression, et on obtient $0 = M^{\omega_1\omega_2} - M^{\omega_1\omega_2} - M^{\omega_2\omega_1} + N^{\omega_1\omega_2}$, d'où $N^{\omega_1\omega_2} = M^{\omega_2\omega_1}$.

Plus généralement, pour tout suite $\underline{\omega}$ de longueur $n \geq 1$, on a

$$1^{\underline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} M^{\underline{\omega}^{\leq i}} N^{\underline{\omega}^{>i}} + N^{\underline{\omega}}, \tag{III.13}$$

où $\underline{\omega}^{<\leq i} = (\omega_1, \dots, \omega_i)$ et $\underline{\omega}^{>i} = (\omega_{i+1}, \dots, \omega_n)$, avec les conventions $\underline{\omega}^{\leq 0} = \emptyset$ et $\underline{\omega}^{>n} = \emptyset$.

Les suites $\underline{\omega}^{>i}$ intervenant dans la somme sont toutes de longueur $< n$. Par hypothèse de récurrence, on a $N^{\underline{s}} = (-1)^{l(\underline{s})} M^{ret(\underline{s})}$ pour tout suite $\underline{s}$ telle que $l(\underline{s}) < n$. On a donc

$$1^{\underline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{l(\underline{\omega}^{>i})} M^{\underline{\omega}^{\leq i}} M^{ret(\underline{\omega}^{>i})} + N^{\underline{\omega}}, \tag{III.14}$$

soit

$$1^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{l(\underline{\omega}^{>i})} \sum_{\underline{s} \in \mathrm{sh}(\underline{\omega}^{\leq i}, ret(\underline{\omega}^{>i})} M^{\underline{s}} + N^{\underline{\omega}}. \tag{III.15}$$

On note $S_i = sh(\underline{\omega}^{\leq i}, ret(\underline{\omega}^{>i}))$, pour $i = 1, \dots, n-1$. On définit une suite E_i, $i = 1, \dots, n-2$ d'ensembles par récurrence, tel que $S_1 = ret(\underline{\omega}) \coprod E_1$, $S_j = E_{j-1} \coprod E_j$, avec $S_{n-1} = \underline{\omega} \coprod E_{n-2}$. Il n'est pas utile d'expliciter les ensembles E_i.

On a donc, pour toute suite $\underline{\omega}$ de longueur ≥ 2, la relation

(III.16)

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & M^{\underline{\omega}} + (-1)^{n-1} (M^{ret(\underline{\omega})} + \sum_{\underline{s} \in E_1} M^{\underline{s}}) + (-1)^{n-2} (\sum_{\underline{s} \in E_1} M^{\underline{s}} + \sum_{\underline{s} \in E_2} M^{\underline{s}}) + \dots \\ & + (-1)(\sum_{\underline{s} \in E_{n-2}} M^{\underline{s}} + M^{\underline{\omega}}) + N^{\underline{\omega}}. \end{aligned}$$

On en déduit,

$$N^{\underline{\omega}} = (-1)^n M^{ret(\underline{\omega})}, \tag{III.17}$$

ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

PARTIE IV
SYMÉTRIES SECONDAIRES ET DÉRIVATIONS

On introduit la symétrie symétril/alternil qui intervient dans des travaux récents de Jean Ecalle sur la combinatoire des polyzêtas. On démontre aussi que l'on peut lire *directement* la symétrie de moules vérifiants certaines équations différentielles. Au passage, on définit quelques dérivations et automorphismes importants sur l'algèbre des moules.

1. Symétries alternil et symétril

Les symétries alternal(el)/symétral(el) sont uniquement liées à la traduction du caractère primitif ou "group like" des séries formelles non commutatives, les coproduits Δ et Δ_* étant donnés. Les symétries alternil/symétril sont d'une autre nature : elles proviennent de l'utilisation de *séries génératrices* associées à des moules alternel/symétrel. Ces deux symétries ont donc un statut particulier vis à vis des quatre premières.

Définition IV.1. — *Soit $Se^\bullet$ un moule symétral. La série génératrice*[13] *associée à $Se^\bullet$ est un moule $Sig^\bullet$ défini par*

$$Sig^{v_1,\dots,v_r} = \sum_{1\leq s_i} Se^{s_1,\dots,s_r} v_1^{s_1-1}\dots v_r^{s_r-1}. \tag{IV.1}$$

La notation Sig fait référence à la symétrilité de $Sig^\bullet$.

Définition IV.2. — *Un moule $M^\bullet$ est symétril (resp. alternil) si*

$$\sum_{\underline{s}\in \mathrm{shi}(\underline{x},\underline{y})} M^{\underline{s}} = M^{\underline{x}} M^{\underline{y}} \text{ (resp. 0)}, \tag{IV.2}$$

où $\mathrm{shi}(\underline{x},\underline{y})$ *s'obtient comme* $\mathrm{csh}(\underline{x},\underline{y})$ *en remplaçant l'addition des variables par un symbole abstrait $*$ décrivant l'évaluation de $M^{\underline{s}}$ suivant la règle*

$$M^{\dots,x_i*y_j,\dots} = \frac{1}{x_i-y_j}\left(M^{\dots,x_i,\dots} - M^{\dots,y_j,\dots}\right), \tag{IV.3}$$

les termes en pointillés pouvant comporter eux aussi le symbole $*$.

Le rapport aux séries génératrices est donné par :

Lemme IV.1. — *Le moule $Sig^\bullet$ est symétril.*

[13] Des séries de même type interviennent déja dans le travail de Jean Ecalle, via la méthode d'*amplification* (voir [**11**]).

Démonstration. — Il suffit de calculer $Sig^{v_1,\dots,v_r}Sig^{v_{r+1}\dots v_n}$. Par définition, on a

$$\text{(IV.4)}\qquad Sig^{v_1,\dots,v_r}Sig^{v_{r+1}\dots v_n} = \sum_{1\leq s_i} Se^{s_1,\dots s_r}Se^{s_{r+1},\dots,s_n}v_1^{s_1-1}\dots v_n^{s_n-1}.$$

Comme le moule $Se^\bullet$ est symétrel, on a

$$Se^{s_1,\dots s_r}Se^{s_{r+1},\dots,s_n} = \sum_{\underline{s}\in \mathrm{csh}((s_1,\dots,s_r),(s_{r+1},\dots,s_n))} Se^{\underline{s}},$$

soit

$$\text{(IV.5)}\qquad Sig^{v_1,\dots,v_r}Sig^{v_{r+1}\dots v_n} = \sum_{1\leq s_i}\sum_{\underline{s}\in \mathrm{csh}((s_1,\dots,s_r),(s_{r+1},\dots,s_n))} Se^{\underline{s}}\,v_1^{s_1-1}\dots v_n^{s_n-1}.$$

Cette somme contient deux types de termes :

i - des termes de la forme $\sum_{1\leq s_i} Se^{\underline{s}}\,v_1^{s_1-1}\dots v_n^{s_n-1}$, où $\underline{s}\in \mathrm{csh}((s_1,\dots,s_r),(s_{r+1},\dots,s_n))$.

ii- des termes de la forme $\sum_{1\leq s_i} Se^{\dots s_i+s_j\dots}\,v_1^{s_1-1}\dots v_n^{s_n-1}$.

Pour i), on obtient, via une réorganisation des v_i,

$$\sum_{\underline{v}\in \mathrm{csh}((v_1,\dots,v_r),(v_{r+1},\dots,v_n))} Sig^{\underline{v}}.$$

Pour ii), c'est un peu plus compliqué.

Nous allons le faire sur un exemple. Le cas général s'en déduisant sans peine. Soit

$$Z(v_1,\dots,v_n) = \sum_{1\leq s_i} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n}v_1^{s_1-1}\dots v_n^{s_n-1}.$$

On a

$$\text{(IV.6)}\qquad \begin{aligned} v_1Z(v_1,\dots,v_n) &= \sum_{1\leq s_i} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n}v_1^{s_1}\dots v_n^{s_n-1},\\ &= \sum_{1\leq s_i,\, s_2=1} Se^{s_1+1,s_3,\dots,s_n}v_1^{s_1}\dots v_n^{s_n-1}\\ &\quad+\sum_{1\leq s_i,\, s_2\geq 2} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n}v_1^{s_1}\dots v_n^{s_n-1},\\ &= Sig(v_1,v_3,\dots,v_n) - \sum_{1\leq s_i} Se^{1,s_3,\dots,s_n}v_3^{s_3-1}\dots v_n^{s_n-1}\\ &\quad+V_1(v_1,\dots,v_n),\end{aligned}$$

où $V_1(v_1,\dots,v_n) = \sum_{1\leq s_i,\, s_2\geq 2} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n}v_1^{s_1}\dots v_n^{s_n-1}$.

Par ailleurs, on a

$$
\begin{aligned}
v_2 Z(v_1,\dots,v_n) &= \sum_{1\leq s_i} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2}\dots v_n^{s_n-1},\\
&= \sum_{1\leq s_i,\, s_1=1} Se^{s_1+1,s_3,\dots,s_n} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2}\dots v_n^{s_n-1}\\
&\quad + \sum_{1\leq s_i,\, s_1\geq 2} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2}\dots v_n^{s_n-1},\\
&= Sig(v_2,\dots,v_n) - \sum_{1\leq s_i} Se^{1,s_3,\dots,s_n} v_3^{s_3-1}\dots v_n^{s_n-1}\\
&\quad + V_2(v_1,\dots,v_n),
\end{aligned}
\tag{IV.7}
$$

où $V_2(v_1,\dots,v_n) = \sum_{1\leq s_i,\, s_1\geq 2} Se^{s_1+s_2,s_3,\dots,s_n} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2}\dots v_n^{s_n-1}$.

En posant $s_1' = s_1 - 1$, $s_2' = s_2+1$ dans V_2, on montre que

$$V_1 = V_2. \tag{IV.8}$$

Finalement, on a

$$Z(v_1,\dots,v_n) = \frac{1}{v_1 - v_2}(Sig^{v_1 v_3\dots v_n} - Sig^{v_2\dots v_n}). \tag{IV.9}$$

Le cas général s'en déduit sans peine. □

Remarque IV.1. — *i. La symétrie alternil ne provient pas de la symétrie alternel traduite sur les fonctions génératrices.*

ii. On peut se demander si la symétrie symetral donne naissance à une nouvelle symétrie. En fait, il est clair, vue l'équation (IV.5), avec csh *remplacé par* sh, *que la fonction génératrice d'un moule symétral est encore un moule symétral.*

2. Dérivations et symétries des moules

2.1. Dérivations sur l'algèbre des moules. — Dans les applications, on est souvent conduit à utiliser des dérivations sur l'algèbre des moules. Ce paragraphe donne, en suivant Ecalle [**15**], un procédé de construction d'une grande quantité de dérivations, suffisantes pour la plupart des applications.

On commence par une définition :

Définition IV.3. — *Soit D une application de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ linéaire. Le moule image d'un moule $M^\bullet$ par D est noté $D(M)^\bullet$. L'application D est une dérivation sur l'algèbre $(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega),\times)$ si elle vérifie*

$$D(M\times N)^\bullet = D(M)^\bullet \times N^\bullet + M^\bullet \times D(N)^\bullet, \tag{IV.10}$$

pour tout moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$.

Certaines dérivations respectent des symétries des moules.

Définition IV.4. — *On dit que la dérivation est alternale si elle préserve l'alternalité du moule sur lequel elle agit.*

On vérifie directement que les dérivations $\bigtriangledown_\omega$ et lang définies ci après sont alternales.

2.2. Construction de dérivations. —

2.2.1. Dérivations simples. — On peut chercher à construire des dérivations simples de la forme

$$(D_\lambda M^\bullet)^{\underline{s}} = \lambda_{\underline{s}} M^{\underline{s}},$$

où $\lambda_\bullet$ est un moule fixé.

Quelles sont les propriétés que doit vérifier $\lambda_\bullet$ pour que l'application D_λ ci-dessus soit une dérivation ?

Il suffit de calculer $D_\lambda(M^\bullet \times N^\bullet)^\bullet$. On a

$$(D_\lambda(M^\bullet \times M^\bullet)^{\underline{s}} = \lambda_{\underline{s}} \left(\sum_{\underline{s}^1 \underline{s}^2 = \underline{s}} M^{\underline{s}^1} N^{\underline{s}^2} \right).$$

Si D_λ est une dérivation, on a l'identité de Leibniz qui impose

$$\begin{aligned}(D_\lambda(M^\bullet \times M^\bullet)^{\underline{s}} &= ((D_\lambda M^\bullet) \times N^\bullet)^{\underline{s}} + (M^\bullet \times (D_\lambda N^\bullet))^{\underline{s}}, \\ &= \sum_{\underline{s}^1 \underline{s}^2 = \underline{s}} \lambda_{\underline{s}^1} M^{\underline{s}1} N^{\underline{s}^2} + \sum_{\underline{s}^1 \underline{s}^2 = \underline{s}} M^{\underline{s}1} \lambda_{\underline{s}^2} N^{\underline{s}^2}, \\ &= \sum_{\underline{s}^1 \underline{s}^2 = \underline{s}} (\lambda_{\underline{s}^1} + \lambda_{\underline{s}^2}) M^{\underline{s}1} N^{\underline{s}^2}.\end{aligned}$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème IV.1. — *L'application D_λ es une dérivation si et seulement si $\lambda_\bullet$ vérifie*

$$\lambda_{\underline{s}^1 \underline{s}^2} = \lambda_{\underline{s}^1} + \lambda_{\underline{s}^2}, \ \forall \ \underline{s}^1, \underline{s}^2 \in \Omega^*.$$

Il existe deux exemples importants de dérivations simples :

- On note lang la dérivation simple définie par le moule

$$\lambda_\bullet = l(\bullet), \tag{IV.11}$$

où $l(\bullet)$ est l'application *longueur de la suite*, i.e.

$$(\mathrm{lang} M)^{\underline{s}} = l(\underline{s}) M^{\underline{s}}. \tag{IV.12}$$

- On note $\bigtriangledown_\omega$ la dérivation simple définie par le moule

$$\lambda_\bullet = \| \bullet \| \, . \tag{IV.13}$$

Notons que cette expression a un sens si et seulement si Ω possède une structure de semi-groupe. Par ailleurs, comme $\lambda_{\underline{s}} M^{\underline{s}}$ dit appartenir à $\mathbb{K}$, cela impose $\underline{s} \in \mathbb{K}^*$.

On a donc

$$(\bigtriangledown M)^{\underline{s}} = \| \, \underline{s} \, \| \, M^{\underline{s}}. \tag{IV.14}$$

Ces dérivations interviennent dans la théorie des formes normales de champs de vecteurs ou difféomorphismes locaux.

2.2.2. Autres constructions. — Soit un moule $Dar^\bullet$ avec $Dar^\emptyset = 0$. On définit un opérateur dar de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ en posant :

$$\begin{array}{llll} dar & : \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega), \\ & M^\bullet & \mapsto & (darM)^\omega = \displaystyle\sum_{\omega_1\omega_2\omega_3=\omega} M^{\omega_1, \|\omega_2\|, \omega_3} Dar^{\omega_2}, \end{array} \tag{IV.15}$$

où la somme est définie sur toutes les factorisations de ω.

Lemme IV.2. — *L'opérateur dar est une dérivation sur $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega, \times)$*

Démonstration. — On note $E^\bullet = dar(M_1^\bullet \times M_2^\bullet)$ et $F^\bullet = M_1^\bullet \times M_2^\bullet$. On a

$$E^\omega = \sum_{\omega=\omega_1\omega_2\omega_3} F^{\omega_1, \|\omega_2\|, \omega_3} Dar^{\omega_2}. \tag{IV.16}$$

Comme $F^{\omega_1, \|\omega_2\|, \omega_3} = \displaystyle\sum_{\hat{\omega}\tilde{\omega}=\omega_1, \|\omega_2\|, \omega_3} M_1^{\hat{\omega}} M_2^{\tilde{\omega}}$, on a

$$F^{\omega_1, \|\omega_2\|, \omega_3} = \sum_{\|\omega\| \in \hat{\omega}} M_1^{\hat{\omega}} M_2^{\tilde{\omega}} + \sum_{\|\omega_2\| \in \tilde{\omega}} M_1^{\hat{\omega}} M_2^{\tilde{\omega}}.$$

En remplaçant dans (IV.16), on obtient

$$E^\omega = \sum_{\omega=\omega_1\omega_2\omega_3} = (\sum_{\|\omega\| \in \hat{\omega}} M_1^{\hat{\omega}} Dar^{\omega_2}) M_2^{\tilde{\omega}} + \sum_{\|\omega_2\| \in \tilde{\omega}} M_1^{\hat{\omega}} (M_2^{\tilde{\omega}} Dar^{\omega_2}).$$

Comme $\hat{\omega}$ est de la forme $\hat{\omega} = \hat{\omega_1}, \| \, \omega_2 \, \|, \hat{\omega_2}$ dans le premier terme de la somme, et tel que $\hat{\omega_1}\hat{\omega_2}\tilde{\omega} = \omega$ (une expression analogue pour $\tilde{\omega}$ dans le second terme), on a finalement

$$E^\omega = \sum_{\omega=\hat{\omega}\tilde{\omega}} (darM_1)^{\hat{\omega}} M_2^{\tilde{\omega}} + \sum_{\omega=\hat{\omega}\tilde{\omega}} M_1^{\hat{\omega}} (darM_2)^{\tilde{\omega}},$$

ce qui termine la démonstration. □

On peut choisir le moule $Dar^\bullet$ pour que la dérivation dar soit alternale :

Lemme IV.3. — *La dérivation dar définie par (IV.15) est alternale si et seulement si le moule $Dar^\bullet$ est alternal.*

Il existe d'autres dérivations construites avec l'opérateur $diff$ défini par

$$
\text{(IV.17)} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{diff} \,:\, M(\Omega) & \to & M(\Omega), \\ M^{\bullet} & \mapsto & (\mathrm{diff} M)^{\underline{w}} = \displaystyle\sum_{w_i \in \underline{w}} \frac{\partial M^{\underline{w}}}{\partial_{w_i}}, \end{array}
$$

ce qui suppose que $M^{\underline{w}}$ soit différentiable en chacune des variables $w_i \in \underline{w}$.

Remarque IV.2. — *Une algèbre de Hopf sur un corps $\mathbb{K}$ est un schèma en groupe affine sur K (voir* [**26**]*, p. 9). Il serait interessant d'avoir une interpréation fonctorielle sur le groupe d'une dérivation moulienne.*

2.3. Dérivations et moules symétrals. — Jean Ecalle m'a suggéré le résultat suivant permettant de démontrer sans trop d'efforts, la symétrie de nombreux moules.

Théorème IV.2. — *Soit D_λ une dérivation et $M^{\bullet}$ un moule vérifiant l'équation différentielle :*

$$
\text{(IV.18)} \qquad D_\lambda M^{\bullet} = A^{\bullet} \times M^{\bullet},
$$

avec :

i) Le moule $\lambda^{\bullet}$ vérifie $\lambda_{\underline{s}} \neq 0$ pour tout $\underline{s}$, $l(\underline{s}) \geq 1$.
ii) On a $M^{\emptyset} = 1$,
iii) le moule $A^{\bullet}$ est alternal,

alors, le moule $M^{\bullet}$ est symetral.

Démonstration. — Commençons par introduire une notion qui nous sera utile pour la suite :

Le moule $M^{\bullet}$ est symétral jusqu'à l'ordre r si il vérifie la condition de symétralité

$$
\sum_{\underline{s} \in \mathrm{sh}(\underline{s}^1, \underline{s}^2)} M^{\underline{s}} = M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^2},
$$

pour tout couple de suites $(\underline{s}^1, \underline{s}^2)$ telles que $l(\underline{s}^1) + l(\underline{s}^2) = r$.

Supposons $M^{\bullet}$ symétral jusqu'à l'ordre r. Soient $\underline{s}^1$ et $\underline{s}^2$ deux suites telles que

$$
l(\underline{s}^1) + l(\underline{s}^2) = r + 1.
$$

On a

$$
\text{(IV.19)} \qquad \lambda_{\underline{s}^1 \underline{s}^2} \sum_{\underline{s} \in \mathrm{sh}(\underline{s}^1 \underline{s}^2)} M^{\underline{s}} = \sum_{\underline{s} \in \mathrm{sh}(\underline{s}^1 \underline{s}^2)} \lambda_{\underline{s}} M^{\underline{s}},
$$

car

$$\lambda_{\underline{s}} = \lambda_{\underline{s}^1\underline{s}^2},\ \forall \underline{s} \in \mathrm{sh}(\underline{s}^1, \underline{s}^2), \tag{IV.20}$$

soit

$$\lambda_{\underline{s}^1\underline{s}^2} \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1\underline{s}^2)} M^{\underline{s}} = \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1\underline{s}^2)} \left(\sum_{\underline{u}\underline{v}=\underline{s}} A^{\underline{u}} M^{\underline{v}} \right). \tag{IV.21}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \lambda_{\underline{s}^1\underline{s}^2} \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1\underline{s}^2)} M^{\underline{s}} &= \sum_{i=0}^{l(\underline{s}^1)} A^{\underline{s}^{1,\leq i}} \sum_{\underline{v}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^{1,>i},\underline{s}^2)} M^{\underline{v}} \\ &+ \sum_{i=0}^{l(\underline{s}^2)} A^{\underline{s}^{2,\leq i}} \sum_{\underline{v}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1,\underline{s}^{2,>i})} M^{\underline{v}} \end{aligned} \tag{IV.22}$$

Par symétralité de $M^\bullet$ d'ordre r, on en déduit

$$\lambda_{\underline{s}^1\underline{s}^2} \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1\underline{s}^2)} M^{\underline{s}} = \sum_{i=0}^{l(\underline{s}^1)} A^{\underline{s}^{1,\leq i}} M^{\underline{s}^{1,>i}} M^{\underline{s}^2} + \sum_{i=0}^{l(\underline{s}^2)} A^{\underline{s}^{2,\leq i}} M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^{2,>i}}, \tag{IV.23}$$

soit

(IV.24)

$$\begin{aligned} \lambda_{\underline{s}^1\underline{s}^2} \sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1\underline{s}^2)} M^{\underline{s}} &= M^{\underline{s}^2} \left(\sum_{i=0}^{l(\underline{s}^1)} A^{\underline{s}^{1,\leq i}} M^{\underline{s}^{1,>i}} \right) + M^{\underline{s}^1} \left(\sum_{i=0}^{l(\underline{s}^2)} A^{\underline{s}^{2,\leq i}} M^{\underline{s}^{2,>i}} \right), \\ &= \lambda_{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^2} + \lambda_{\underline{s}^2} M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^2}, \\ &= M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^2} (\lambda_{\underline{s}^1} + \lambda_{\underline{s}^2}), \\ &= M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^2} \lambda_{\underline{s}^1\underline{s}^2}. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_{\underline{s}} \neq 0$ pour toute suite $\underline{s} \in \Omega^* \setminus \{\emptyset\}$, on obtient

$$\sum_{\underline{s}\in \mathrm{sh}(\underline{s}^1,\underline{s}^2)} M^{\underline{s}} = M^{\underline{s}^1} M^{\underline{s}^2}, \tag{IV.25}$$

donc, la symétralité de $M^\bullet$ à l'ordre $r+1$. Une simple récurrence termine la preuve. $\square$

Remarque IV.3. — *L'équation (IV.18) est suggérée par le résultat classique suivant. Pour tout $x \in \mathbb{K} << \Omega >>$, avec x primitif, on a*

$$D(e^x) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} ad(x)^{k-1}(Dx)e^x = \left(\frac{e^{ad(x)} - 1}{e^{ad(x)}} \right) (Dx)e^x,$$

avec $ad(x)(y) = xy - yx$. Du point de vue moulien, on obtient, en notant $x = \sum_{w\in\Omega^*} A^w w$,

$$e^x = \sum_{w\in\Omega^*} exp(A)^w w = \sum_{w\in\Omega^*} M^w w,$$

$$D(M^\bullet) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} ad(A^\bullet)(DA^\bullet)M^\bullet.$$

Ce lemme permet notamment de démontrer, sans aucun calcul sur les suites, la symétralité du moule

$$S^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \frac{(-1)^r}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\dots(\omega_1+\dots+\omega_r)},$$

étudié au §5.1. En effet, on a

$$\nabla S^\bullet = S^\bullet \times I^\bullet,$$

avec $I^\bullet$ evidemment alternal.

Par ailleurs, le seul moule $M^\bullet$ vérifiant $\nabla M^\bullet = 0$ pour tout suite $\underline{\omega}$ telle que $\parallel \underline{\omega} \parallel \neq 0$, est le moule constant égal à 0. On en déduit donc que $S^\bullet$ est symétral.

3. Automorphismes et symétries

3.1. Définition. — Commençons par une définition :

Définition IV.5. — *Soit A une application de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ linéaire. Le moule image d'un moule $M^\bullet$ par A est noté $A(M)^\bullet$. L'application A est un automorphisme de l'algèbre $(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega), \times)$ si elle vérifie*

$$A(M \times N)^\bullet = A(M)^\bullet \times A(N)^\bullet, \tag{IV.26}$$

pour tout moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$.

On peut chercher à construire des automorphismes simples de la forme

$$A_f(M)^\bullet = f(\bullet)M^\bullet, \tag{IV.27}$$

où f est une application de Ω^* dans $\mathbb{K}$. L'application f doit bien entendu satisfaire certaines contraintes.

Lemme IV.4. — *L'application A_f de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ définie par (IV.27) est un automorphisme de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\Omega)$ si et seulement si f est un morphisme de $(\Omega^*, \bullet)$ dans $(\mathbb{K}, \times)$.*

Démonstration. — Il suffit d'étudier la relation induite par la relation (IV.26). Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules. On obtient pour toute suite $\underline{\omega} \in \Omega^*$

$$f(\underline{\omega}) \sum_{\underline{\omega}^1\underline{\omega}^2=\underline{\omega}} M^{\underline{\omega}^1} N^{\underline{\omega}^2} = \sum_{\underline{\omega}^1\underline{\omega}^2=\underline{\omega}} f(\underline{\omega}^1) M^{\underline{\omega}^1} f(\underline{\omega}^2) N^{\underline{\omega}^2}, \tag{IV.28}$$

soit

$$f(\underline{\omega}) = f(\underline{\omega}^1) f(\underline{\omega}^2). \tag{IV.29}$$

L'application f est donc un morphisme de $(\Omega^*, \bullet)$ dans $(\mathbb{K}, \times)$. $\square$

3.2. Exemples. — Soit Ω un alphabet de lettres $\omega \in \mathbb{R}$. Pour tout moule $M^\bullet$ sur $M(\Omega)$, et pour toute suite $\underline{\omega} \in \Omega^*$, on définit une application e^∇ par

$$e^\nabla M^{\underline{\omega}} = e^{\|\underline{\omega}\|} M^{\underline{\omega}}. \tag{IV.30}$$

Remarque IV.4. — *Cet automorphisme intervient naturellement dans les problèmes de formes normales des difféomorphismes locaux.*

3.3. Automorphismes et moules symetrels. — Le lemme suivant est l'analogue de la relation liant derivations et moules symetrals, dans le cas des automorphismes et des moules symetrels :

Lemme IV.5. — *Soit Ω un alphabet, $M(\Omega)$ l'algèbre des moules sur Ω, et A_f un automorphisme admissible sur $M(\Omega)$. Soit $M^\bullet$ un moule tel que*

$$A_f(M)^\bullet = (1^\bullet + I^\bullet) \times M^\bullet. \tag{IV.31}$$

Alors le moule $M^\bullet$ est symétrel.

Démonstration. — Pour toute suite $\underline{\omega}$ on a

$$f(\underline{\omega}) M^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}} + M^{\underline{\omega}^{\geq 2}}, \tag{IV.32}$$

soit

$$M^{\underline{\omega}} = \frac{1}{f(\underline{\omega}) - 1} M^{\underline{\omega}^{\geq 2}}. \tag{IV.33}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{\omega} \in \mathrm{csh}(\underline{u},\underline{v})} M^{\underline{\omega}} &= \sum_{\underline{\omega} \in \mathrm{csh}(\underline{u},\underline{v})} \frac{1}{f(\underline{\omega}) - 1} M^{\underline{\omega}^{\geq 2}}, \\ &= \frac{1}{f(\underline{uv}) - 1} \sum_{\underline{\omega} \in \mathrm{csh}(\underline{u},\underline{v})} M^{\underline{\omega}^{\geq 2}}, \end{aligned} \tag{IV.34}$$

car la valeur de f sur un mot ne dépend pas de l'ordre des lettres.

Les propriétés du battage contractant, via le lemme II.6, donnent

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{\omega} \in \mathrm{csh}(\underline{u},\underline{v})} M^{\underline{\omega}} &= \frac{1}{f(\underline{uv}) - 1} \left[M^{\underline{u}} M^{\underline{v}^{\geq 2}} + M^{\underline{u}^{\geq 2}} M^{\underline{v}} + M^{\underline{u}^{\geq 2}} M^{\underline{v}^{\geq 2}} \right], \\ &= \frac{1}{f(\underline{uv}) - 1} \left[f(\underline{v}) - 1 + f(\underline{u}) - 1 + (f(\underline{u}) - 1)(f(\underline{v}) - 1) \right], \\ &= M^{\underline{u}} M^{\underline{v}}, \end{aligned} \tag{IV.35}$$

car $f(\underline{uv}) = f(\underline{u}) f(\underline{v})$ par hypothèse. □

On peut sans doute démontrer un théorème analogue dans le cas de l'équation

$$A_f(M)^\bullet = (1^\bullet + E^\bullet) M^\bullet, \tag{IV.36}$$

où $E^\bullet$ est un moule alternel, mais la complexité des calculs est beaucoup plus importante.

4. Dualité des algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$

Le théorème qui suit donne une application permettant de passer de $\mathbb{E}$ à $\mathbb{A}$ (et vice versa). La symétrie symetrel/alternel est beaucoup plus complexe et couteuse en terme de calculs que la symétrie symetral/alternal. Il peut donc être utile de passer de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ pour vérifier des propriétés de symétrie.

Théorème IV.3. — *Soit $Se^\bullet$ (resp. E) un moule symetrel (resp. alternel) et* $\mathrm{Exp}^\bullet$ *le moule exponentiel défini par*

$$\mathrm{Exp}^\emptyset = 1, \quad \mathrm{Exp}^{s_1 \dots s_r} = 1/r! \;\; \forall\, \underline{s} = s_1 \dots s_r \neq \emptyset. \tag{IV.37}$$

Le moule

$$Sa^\bullet = Se^\bullet \circ \mathrm{Exp}^\bullet, \;\; (resp. \;\; A^\bullet = E^\bullet \circ \mathrm{Exp}^\bullet), \tag{IV.38}$$

est un moule symetral (resp. alternal).

Autrement dit, il existe une *dualité* entre les algèbre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{E}$ via la composition par le moule exponentielle.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme IV.6. — *Soit Ω un semi-groupe. Le moule exponentielle* $\mathrm{Exp}^\bullet$ *définit un alphabet Y tel que chaque lettre Y_ω est groupe-like par rapport au co-produit Δ, i.e.*

$$\Delta(Y_\omega) = \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} Y_{\omega_1} \otimes Y_{\omega_2}. \tag{IV.39}$$

Démonstration. — Soit X un alphabet de type Δ et $\underline{x}$ un mot de X^*. On associe à chaque lettre x_i un poids $p_i \in \mathbb{N}$. Le poids d'un mot est la somme des poids de ces lettres. On note $\| \underline{x} \|$ le poids. On étend cette définition à $\mathbb{A}$ par linéarité.

On a

$$\mathrm{Exp} = \sum_{\underline{x} \in X^*} \mathrm{Exp}^{\underline{x}} \underline{x} = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i, \tag{IV.40}$$

où les y_i sont les composantes homogènes de poids i de Exp.

Or, l'alphabet (y_i) vérifie

$$\Delta(y_i) = \sum_{l+k=i} y_l \otimes y_k. \tag{IV.41}$$

En effet, on a

$$\Delta(y_i) = \Delta\left(\sum_{\underline{x},\ \|\underline{x}\|=i} \mathrm{Exp}^{\underline{x}}\underline{x}\right). \tag{IV.42}$$

On a

$$\Delta(\underline{x}) = \sum_{\underline{x}^1,\underline{x}^2|\ \underline{x}\in \mathrm{sh}(\underline{x}^1,\underline{x}^2)} \underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2. \tag{IV.43}$$

Comme la somme (IV.42) fait intervenir tous les $\underline{x}$ tels que $\| \underline{x} \| = i$, on peut la reécrire, en utilisant (IV.43) :

$$\Delta(y_i) = \sum_{\underline{x}^1,\underline{x}^2|\ \|\underline{x}^1\|+\|\underline{x}^2\|=i} Exp^{\underline{x}^1}\mathrm{Exp}^{\underline{x}^2}\underline{x}^1 \otimes \underline{x}^2, \tag{IV.44}$$

où nous avons implicitement utilisé le fait que le moule $\mathrm{Exp}^\bullet$ dépend seulement de la longueur des suites.

En regroupant les termes, on a finalement :

$$\Delta(y_i) = \sum_{l+k=i} y_l \otimes y_k, \tag{IV.45}$$

ce qui termine la démonstration. □

La démonstration du théorème IV.3 s'en déduit comme suit :

Soit Sa la série formelle non commutative associée au moule $Sa^\bullet$ sur X. Par définition de la composition des moules, on a :

$$Sa = \sum_{x\in X^*} Sa^x x = \sum_{Y\in Y^*} Se^Y Y. \tag{IV.46}$$

Comme l'alphabet est constitué de lettres groupe-like pour le coproduit Δ et le moule $Se^\bullet$ est symmetrel, alors la série $\sum_{Y\in Y^*} Se^Y Y$ est groupe-like pour le coproduit Δ. On en déduit que le moule $Sa^\bullet$ est symmetral, puisqu'il définit un élément group-like sur un alphabet primitif.

Le démonstration du passage entre moule alternel et alternal est analogue.

PARTIE V
THÉORIE DES FORMES NORMALES D'OBJETS LOCAUX

Le but de cette partie est de montrer le langage des moules et comoules en action sur le problème de la recherche des formes normales d'objets analytiques locaux, comme les champs de vecteurs et les difféomorphismes de $\mathbb{C}^\nu$. On démontre les versions mouliennes de théorèmes classiques : théorème de Poincaré, forme normale résonante de Poincaré-Dulac, théorème de Bruyno, et ceci, aussi bien pour les difféomorphismes que les champs de vecteurs analytiques locaux. Outre leurs intérêts conceptuels, ces démonstrations donnent des expressions explicites des normalisateurs[14] et permettent de mettre en évidence des coefficients *universels*[15] dans ces problèmes, qui sont justement des moules. Au passage, on donne une présentation originale de la méthode d'arborification, qui restaure la convergence des séries mouliennes, et dont le domaine d'applications dépasse largement celui de la théorie des formes normales.

1. Objets locaux : champs de vecteurs et difféomorphismes

1.1. Champs de vecteurs. — Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$. On considère un champ de vecteur de $\mathbb{C}^\nu$ de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\partial_{x_i},\ X_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}, \tag{V.1}$$

avec la notation simplifiée $\partial_{x_i} = \partial/\partial_{x_i}$.

Nous étudions les champs de vecteurs *locaux*, i.e. tels que

$$X_i(0) = 0,\ i = 1, \ldots, \nu. \tag{V.2}$$

On note X_{lin} la partie linéaire de X. En suivant Brjuno [**3**], on décompose le champ X sous la forme

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)} D_{\underline{n}}, \tag{V.3}$$

où les $D_{\underline{n}}$ sont des *opérateurs homogènes* de degré $\underline{n}$, avec $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_\nu)$, et tous les $n_i \geq 0$, sauf au plus un qui peut valoir -1, i.e.

$$D_{\underline{n}}(x^{\underline{m}}) = c_{\underline{n},\underline{m}} x^{\underline{n}+\underline{m}},\ c_{\underline{n},\underline{m}} \in \mathbb{C},\ \underline{m} \in \mathbb{N}^\nu. \tag{V.4}$$

[14] C'est à dire des changements de variables.
[15] Nous donnerons un sens précis à cette terminologie dans le texte.

On note $A(X)$ l'ensemble des degrés des opérateurs homogènes intervenant dans la décomposition (V.3).

On remarque que pour tout $\underline{n} \in A(X)$, $D_{\underline{n}}$ est une dérivation.

1.1.1. Exemple. — Soit $X(x,y)$ un champ de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$\begin{array}{rcl} X(x,y) & = & \lambda x\partial_x + \beta y\partial_y + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)\partial_x \\ & & +(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)\partial_y. \end{array}$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, $b_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i+j=2$, $i,j \in \mathbb{N}$.

La décomposition (V.3) s'écrit

$$X = X_{\text{lin}} + D_{1,0} + D_{0,1} + D_{-1,2} + D_{2,-1},$$

où $X_{\text{lin}} = \lambda x\partial_x + \beta y\partial_y$, et

$$\begin{array}{rcl} D_{1,0} & = & a_{20}x^2\partial_x + b_{11}xy\partial_y, \\ D_{0,1} & = & a_{11}yx\partial x + b_{02}y^2\partial y, \\ D_{-1,2} & = & a_{02}y^2\partial_x, \\ D_{2,-1} & = & b_{20}x^2\partial_y. \end{array} \tag{V.5}$$

On a donc $A(X) = \{(1,0),(0,1),(-1,2),(2,-1)\}$.

Dans la suite, on supposera toujours que la partie linéaire du champ est sous forme *diagonale*, i.e.

$$X_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i},$$

où $\underline{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_\nu)$ est le *spectre* de X_{lin}.

Le champ est alors dit *sous forme préparé* par Ecalle.

Cette condition est-elle restrictive ? Non, si on se place dans la classe des champs de vecteurs formels. En effet, en suivant Martinet ([**22**],§.1.1) tout champ de vecteur formel peut, via un difféomorphisme formel, se mettre sous la forme

$$X = X_{\text{lin}} + X_N,$$

où X_{lin} est linéaire diagonale et X_N est nilpotent, avec $[X_{\text{lin}}, X_N] = 0$. Evidemment, le champ X_N n'est déterminé que modulo l'action du groupe des difféomorphismes formels laissant X_{lin} invariant.

1.2. Difféomorphismes. — On considère un difféomorphisme locale de $\mathbb{C}^\nu$ de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_\nu) \mapsto (f_1(x), \dots, f_\nu(x)),\ \ f_i(x) \in \mathbb{C}\{x\},$$

tel que

$$f_i(0) = 0.$$

On associe à f son *opérateur de substitution* :

$$F : \phi \to \phi \circ f.$$

On démontre que F peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{array}{rcl} F & = & F_{lin}\left(1 + \sum_n B_n\right), \\ F_{lin} : \phi & \mapsto & \phi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_\nu x_\nu), \end{array} \tag{V.6}$$

où les $B_{\underline{n}}$ sont des opérateurs homogènes de degré $\underline{n}$, $n = (n_1, \dots, n_\nu)$, $n_i \geq 0$, sauf au plus un qui peut valoir -1. On note $A(F)$ l'ensemble des degrés des opérateurs $B_{\underline{n}}$ obtenus dans la décomposition (V.6).

On remarque que $B_{\underline{n}}$, $\underline{n} \in A(F)$, est un opérateur *différentiel* (cela provient de la formule de Taylor). Son coproduit est donc

$$\Delta_*(B_\omega) = \sum_{\omega_1 + \omega_2 = \omega} B_{\omega_1} \otimes B_{\omega_2}.$$

Exemple V.1. — *On considère le difféomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par*

$$f(x) = \lambda x + x^2.$$

Soit $\phi(x) = \sum_n a_n x^n$ un élément de $\mathbb{C}\{x\}$. On veut expliciter l'opérateur de substitution $F : \phi \to \phi \circ f$. On a

$$\phi \circ f(x) = \sum_n a_n (\lambda x + x^2)^n.$$

Comme

$$(\lambda x + x^2)^n = \sum -k C_n^k (x^2)^k (\lambda x)^{n-k},$$

on a, en regroupant correctement les termes,

$$\phi \circ f(x) = \sum_k \frac{(x^2)^k}{k!} \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (\lambda x)^{n-k}.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{d^k \phi}{dx^k}(x) = \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

ce qui donne $F = F_{lin}(1 + \sum_{k\geq 1} B_k)$, *en posant*

$$B_k = \frac{(x^2)^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}.$$

2. Conjugaison des objets analytiques locaux

2.1. Conjugaison. — Soit X (resp. F) un champ de vecteur (resp. difféomorphisme) sous forme préparée. On regarde l'effet d'un changement de variable (formel ou non) sur ces objets. On note x les variables initiales dans lesquelles sont explicités X et F.

On considère un changement de variable $x = h(y)$. On note Θ l'opérateur de substitution associé à h, défini pour tout $\phi \in \mathbb{C}[[x]]$ par

$$\Theta\phi = \phi \circ h, \quad \Theta^{-1}\phi = \phi \circ h^{-1}. \tag{V.7}$$

La remarque importante est :

Proposition V.1. — *L'opérateur de changement de variable* Θ *est un automorphisme de* $\mathbb{C}[[x]]$.

Démonstration. — L'application Θ est $\mathbb{C}$-linéaire, et h étant un difféomorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$, l'application $\phi \mapsto \phi \circ h^{-1}$ est bien définie et correspond à Θ^{-1}. Par ailleurs, on a

$$\begin{array}{rcl} \Theta(\phi\psi) & = & (\phi\psi) \circ h, \\ & = & (\phi \circ h)(\psi \circ h), \\ & = & \Theta(\phi)\Theta(\psi), \end{array}$$

et Θ est bien un morphisme de $\mathbb{C}[[x]]$. □

Remarque V.1. — *Connaissant l'automorphisme* Θ*, on retrouve le changement de variable associé en appliquant* Θ *à l'application identité de* $\mathbb{C}^\nu$.

Définition V.1. — *Soient* X *et* F *un champ de vecteur (resp. difféomorphisme) analytique local de* $\mathbb{C}^\nu$. *Un champ* X_{conj} *(resp. un difféomorphisme* F_{conj}*) est dit conjugué à* X *(resp.* F*), si il existe un changement de variable* h *tel que*

$$X_{\text{conj}} = \Theta X \Theta^{-1}, (\text{resp. } F_{\text{conj}} = \Theta F \Theta^{-1}), \tag{V.8}$$

où Θ *est l'opérateur de substitution associé à* h*, i.e. si le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{x\} & \xrightarrow{X} & \mathbb{C}\{x\}, \\ \uparrow \Theta & & \uparrow \Theta \\ \mathbb{C}\{y\} & \xrightarrow{X_{\text{conj}}} & \mathbb{C}\{y\}. \end{array} \tag{V.9}$$

L'origine de ces équations de conjugaison est la suivante :

– Un champ de vecteur X en x est une dérivation sur les germes de fonctions en x. Soit h un difféomorphisme. L'image de X par h^{-1}[16] est un champ de vecteur en $y = h^{-1}(x)$, donc une dérivation sur les germes de fonctions en y. Notons X_{conj} ce champ image. Comment lui donner un sens ? Soit ϕ un germe de fonction en $h^{-1}(x)$, alors $\phi \circ h^{-1}$ est un germe de fonction en x. On peut faire agir X dessus, et on obtient le germe $X(\phi \circ h^{-1})$ en x. Comme $X_{\text{conj}}(\phi)$ doit être un germe en $h^{-1}(x)$, on transporte $X(\phi \circ h^{-1})$ par h à droite, soit $X(\phi \circ h^{-1}) \circ h$. Cette fonction est définie sur un voisinage de $y = h^{-1}(x)$, c'est donc un germe de fonctions en y. Une définition est donc $X_{\text{conj}}(\phi) = \Theta X \Theta^{-1}(\phi)$ pour tout germe ϕ en $h(x)$, où Θ est l'automorphisme de substitution associé à h. On renvoie à ([**20**],p.96) pour plus de détails.

– Pour les automorphismes, un raisonnement analogue au précédent conduit au résultat.

La conjugaison est dite *formelle* (resp. *analytique*) si le changement de variables associé est formel (resp. analytique).

Lorsque $X_{\text{conj}} = X_{\text{lin}}$ ou $F_{\text{conj}} = F_{\text{lin}}$, on parle de *linéarisation.*

Remarque V.2. — *On peut imposer des contraintes sur la forme des objets conjugués. Si le champ conjugué ne contient que des termes résonants, on parle de prénormalisation. Si de plus, le nombre de ces termes est minimal parmis toutes les formes prénormales, on parle de normalisation. On renvoie au §.4 pour plus de détails.*

2.2. Équation de conjugaison. — Soit X un champ de vecteur analytique local, d'alphabet $A(X)$ et F l'opérateur de substitution d'un difféomorphisme analytique local f, d'alphabet $A(F)$. Soit Na et Ne des automorphismes de conjugaison de X et F respectivement.

Comme Na et Ne sont des automorphismes de $\mathbb{C}[[x]]$, on peut les chercher sous la forme

$$Na = \sum_{\underline{s} \in A^*(X)} Na^{\underline{s}} D_{\underline{s}}, \tag{V.10}$$

[16] Rappelez vous que l'on cherche un changement de variable $x = h(y)$, où x est le système de coordonnées initial.

avec $Na^\bullet$ un moule symétral pour X, et

$$Ne = \sum_{\underline{s}\in A^*(F)} Ne^{\underline{s}} B_{\underline{s}}, \tag{V.11}$$

où $Ne^\bullet$ est un moule symétrel pour F.

Via ces changements de variables, on obtient des objets conjugués de la forme

$$X_{\mathrm{conj}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\underline{s}\in A^*(X)} Ca^{\underline{s}} D_{\underline{s}}, \quad F_{\mathrm{conj}} = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{\underline{s}\in A^*(F)} Ce^{\underline{s}} B_{\underline{s}}, \tag{V.12}$$

où les moules $Ca^\bullet$ et $Ce^\bullet$ sont alternal et symétrel respectivement.

Dans ce cas, X_{conj} est bien une dérivation de $\mathbb{C}[[x]]$, et F_{conj} un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$.

L'équation de conjugaison pour un champ de vecteur et un difféomorphisme s'écrit donc en terme moulien sous la forme

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{lin}} + \sum_\bullet Ca^\bullet D_\bullet &= \left(\sum_\bullet Na^\bullet D_\bullet\right)\left(X_{\mathrm{lin}} + \sum_\bullet I^\bullet D_\bullet\right)\left(\sum_\bullet (Na^\bullet)^{-1} D_\bullet\right), \\ F_{\mathrm{lin}} + \sum_\bullet Ce^\bullet B_\bullet &= \left(\sum_\bullet Ne^\bullet B_\bullet\right)\left(F_{\mathrm{lin}} + \sum_\bullet I^\bullet B_\bullet\right)\left(\sum_\bullet (Ne^\bullet)^{-1} B_\bullet\right), \end{aligned} \tag{V.13}$$

respectivement, où $I^\bullet$ est le moule élément neutre pour la composition.

***Théorème V.1* (Conjugaison).** — *Les équations de conjugaison (V.13) sont équivalentes aux équations mouliennes*

$$Na(e)^\bullet \times \nabla(Na(e)^{-1})^\bullet + Na(e)^\bullet \times I^\bullet \times (Na(e)^{-1})^\bullet = Ca(e)^\bullet, \tag{V.14}$$

où ∇ est la dérivation moulienne définie par

$$(\nabla M^\bullet)^{\underline{s}} = \| \underline{s}.\underline{\lambda} \| \, M^{\underline{s}}. \tag{V.15}$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme technique suivant :

Lemme V.1. — *Soient $\phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}^\nu} a_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]$, et B_{n^i}, $i = 1,\dots,r$, une famille d'opérateurs différentiels homogènes de degré n^i satisfaisant*

$$B_{n^i}(x^m) = \beta_m^{n^i} x^{m+n^i}, \ \beta_m^{n^i} \in \mathbb{C}. \tag{V.16}$$

. On a :

$$B_{\underline{n}}\phi(x) = \sum_m a_m(\beta^{n^r}.m)(\beta^{n^{r-1}}.(m+n^r))\dots(\beta^{n^1}.(m+n^r+\dots+n^2))x^{m+n^r+\dots+n^1}. \tag{V.17}$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} B_{\underline{n}}\phi(x) &= \sum_m a_m B_{\underline{n}}(x^m), \\ & \sum_m a_m B_{n^1}\dots B_{n^r}(x^m). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a pour tout n^i,

$$\begin{aligned} B_{n^i}\phi(x) &= \sum_m a_m(B_{n^i}x^m), \\ &= \sum_m a_m(\beta^{n^i}.m)x^{m+n^i}. \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate termine la démonstration. □

On en déduit le corollaire essentiel suivant :

Corollaire V.1. — *Pour toute suite* $\underline{s}$*, on a*

(V.18) $$X_{\text{lin}}D_{\underline{s}} = \parallel \underline{\lambda}.\underline{s} \parallel D_{\underline{s}} + D_{\underline{s}}X_{\text{lin}}.$$

Démonstration. — On a, en utilisant (V.17) :

$$B_{\underline{n}}\phi(x) = \sum_m a_m(\beta^{n^r}.m)(\beta^{n^{r-1}}.(m+n^r))\dots(\beta^{n^1}.(m+n^r+\dots+n^2))x^{m+n^r+\dots+n^1}.$$

Comme $X_{\text{lin}}(x^m) = (\underline{\lambda}.m)x^m$, on en déduit

$$X_{\text{lin}}B_{\underline{n}}\phi(x) = \sum_m a_m(\beta^{n^r}.m)\dots(\beta^{n^1}.(m+n^r+\dots+n^2))(\underline{\lambda}.(m+n^r+\dots+n^1))x^{m+n^r+\dots+n^1},$$

soit

$$\begin{aligned} X_{\text{lin}}B_{\underline{n}}\phi(x) &= \sum_m a_m(\beta^{n^r}.m)\dots(\beta^{n^1}.(m+n^r+\dots+n^2))(\underline{\lambda}. \parallel \underline{n} \parallel)x^{m+n^r+\dots+n^1} \\ &\quad + \sum_m a_m(\beta^{n^r}.m)\dots(\beta^{n^1}.(m+n^r+\dots+n^2))(\underline{\lambda}.m)x^{m+n^r+\dots+n^1}. \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème V.1. — On a, en utilisant le corollaire V.1

(V.19) $$X_{\text{lin}}\left(\sum_\bullet M^\bullet D_\bullet\right) = \sum_\bullet \nabla M^\bullet D_\bullet + \sum_\bullet M^\bullet D_\bullet X_{\text{lin}}.$$

La multiplication à gauche par Θ^{-1} donne

$$\Theta^{-1}X_{\text{lin}}\Theta = \sum_\bullet (\Theta^\bullet)^{-1} \times \nabla\Theta^\bullet D_\bullet + \sum_\bullet (\Theta^\bullet)^{-1}\Theta^\bullet D_\bullet X_{\text{lin}}.$$

Comme $(\Theta^\bullet)^{-1}\Theta = 1^\bullet$, on a

$$\sum_\bullet (\Theta^\bullet)^{-1}\Theta^\bullet D_\bullet X_{\text{lin}} = X_{\text{lin}},$$

soit

$$\Theta^{-1}X_{\text{lin}}\Theta = \sum_\bullet (\Theta^\bullet)^{-1} \times \nabla\Theta^\bullet D_\bullet + X_{\text{lin}}.$$

On a donc

$$X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} Ca^{\bullet} D_{\bullet} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} ((Na^{-1})^{\bullet}) \nabla Na^{\bullet} D_{\bullet} + \sum_{\bullet} ((Na^{-1})^{\bullet}) I^{\bullet} Na^{\bullet} D_{\bullet}.$$

On en déduit le résultat. Pour les difféomorphismes, la démonstration est analogue. □

3. Linéarisation formelle

Dans cette section, on redémontre le théorème de linéarisation formelle de Poincaré. L'outil moulien permet de renouveler son approche, en mettant en évidence des coefficients *universels* de linérisation, qui n'apparaissaient pas dans la littérature classique du sujet.

3.1. Le théorème de Poincaré. — On cherche le normalisateur Na tel que

$$X_{\text{lin}} = Na X Na^{-1},$$

ou, ce qui revient au même

$$X = Na^{-1} X_{\text{lin}} Na.$$

Par construction, nous supposons que Na est de la forme

$$Na = \sum_{\bullet} Na^{\bullet} D_{\bullet},$$

c'est à dire dans $\mathcal{D}$. On a $Na^{-1} = \sum_{\bullet} (Na^{\bullet})^{-1} D_{\bullet}$. L'équation de linéarisation donne

$$\left(\sum_{\bullet} Na^{\bullet} D_{\bullet} \right) X_{\text{lin}} \left(\sum_{\bullet} (Na^{\bullet})^{-1} D_{\bullet} \right) = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} D_{\bullet}, \tag{V.20}$$

où $I^{\bullet}$ est le moule élément neutre pour la composition.

On en déduit l'égalité suivante sur les moules

$$\triangledown (Na^{\bullet})^{-1} \times Na^{\bullet} = I^{\bullet}, \tag{V.21}$$

où $\triangledown$ est la dérivation sur l'algèbre des moules définie par $\triangledown M^{\underline{\omega}} = \| \underline{\omega} \| \, M^{\underline{\omega}}$. On a donc les formules de récurrence[17] suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \triangledown (Na^{\bullet})^{-1} & = & I^{\bullet} \times (Na^{\bullet})^{-1}, \\ \triangledown Na^{\bullet} & = & -Na^{\bullet} \times I^{\bullet}. \end{array} \tag{V.22}$$

Nous avons donc la version explicite[18] suivante du théorème de Poincaré :

[17] Comme nous allons le voir, ces formules définissent le moule $Na^{\bullet}$ par récurrence sur la *longueur* des mots, ce qui n'est pas évident a priori.
[18] Le normalisateur est donné explicitement.

***Théorème V.2* (Poincaré).** — *Soit* $X = X_{\text{lin}} + \sum_{\underline{n}\in A(X)} D_{\underline{n}}$ *un champ de vecteur local de* $\mathbb{C}^\nu$, *avec* $X_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i}$, $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$. *Pour tout* $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in A^*(X)$, $s_i \in A(X)$, *on note* $\omega(\underline{s}) = (\omega_1, \dots, \omega_r) \in \mathbb{C}^\nu$ *le vecteur défini par* $\omega_i = s_i.\underline{\lambda}$, $i = 1, \dots, \nu$, *et* $\parallel \omega(\underline{s}) \parallel = \omega_1 + \cdots + \omega_r$.

On suppose que le champ est non résonant, i.e.

$$\parallel \omega(\underline{s}) \parallel \neq 0 \text{ pour tout } \underline{s} \in A^*(X).$$

Alors, le champ X *est formellement linéarisable, par un automorphisme formel de* $\mathbb{C}[[x]]$ *de la forme*

$$Na = \sum_{\bullet} Na^{\bullet} D_{\bullet},$$

avec pour tout $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in A^*(X)$, $s_i \in A(X)$,

$$Na^{\underline{s}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r)},$$

où $\omega_i = s_i.\underline{\lambda}$.

Démonstration. — On calcule $Na^{\bullet}$ par récurrence sur la longueur des suites. On a $Na^{\emptyset} = 1$ par hypothèse.

Pour $l(\omega) = 1$, on a

$$\omega Na^{\omega} = Na^{\omega} I^{\emptyset} + Na^{\emptyset} I^{\omega} = 1,$$

d'où

$$Na^{\omega} = \frac{1}{\omega},$$

si $\omega \neq 0$.

Pour $l(\underline{\omega}) = r$, $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$, on a la relation de récurrence

$$\parallel \underline{\omega} \parallel Na^{\underline{\omega}} = Na^{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}} I^{\omega_r}, \tag{V.23}$$

d'où, pour $\parallel \underline{\omega} \parallel \neq 0$, on a

$$Na^{\underline{\omega}} = \frac{1}{\parallel \underline{\omega} \parallel} Na^{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}}. \tag{V.24}$$

Une simple récurrence donne la forme générale de $Na^{\bullet}$, à savoir

$$Na^{\omega_1, \dots, \omega_r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r)}. \tag{V.25}$$

Comme $Na^{\bullet}$ vérifie l'équation (V.21), on sait d'après le théorème IV.2 que le moule $Na^{\bullet}$ est symétral, i.e. que l'objet Na est un automorphisme formel de $\mathbb{C}[[x]]$. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque V.3. — *i. L'opérateur Na est un objet formel. Pour étudier son éventuelle convergence, Ecalle a introduit la méthode d'arborification. Nous renvoyons à l'article d'Ecalle* [**10**] *pour plus de détails.*

ii. Si le champ de vecteur est hamiltonien, le changement de variable est, par construction, automatiquement symplectique.

3.2. Cas des difféomorphismes. — L'équation de linéarisation est

$$Ne^{-1}FNe = F_{\mathrm{lin}},$$

soit

$$NeF_{lin}Ne^{-1} = F.$$

Via le calcul moulien, on a donc

$$\left(\sum_{\bullet} Ne^{\bullet}B_{\bullet}\right) F_{lin} \left(\sum_{\bullet}(Ne^{\bullet})^{-1}B_{\bullet}\right) = \left(\sum_{\bullet}(1^{\bullet}+I^{\bullet})B_{\bullet}\right) F_{lin},$$

où $1^{\bullet}$ est le moule élément neutre pour la multiplication. On en déduit la relation suivante sur les moules

$$e^{\nabla}(Ne^{\bullet})^{-1} \times Ne = 1^{\bullet} + I^{\bullet}, \tag{V.26}$$

où e^{∇} est un automorphisme de l'algèbre des moules défini par

$$(e^{\nabla}M^{\bullet})^{\underline{\omega}} = e^{\|\underline{\omega}\|}M^{\underline{\omega}}.$$

On a donc la relation suivante

$$(Ne^{\bullet})^{-1} = (1^{\bullet} + I^{\bullet}) \times (Ne^{\bullet})^{-1}. \tag{V.27}$$

Lemme V.2. — *Soit $F = F_{lin}(1 + \sum_{\underline{n}\in A(F)} B_{\underline{n}})$ un automorphisme local de $\mathbb{C}^{\nu}[[x]]$, $F_{lin} : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]]$, défini par $F_{in}(\phi) = \phi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_{\nu}x_{\nu})$ pour tout $\phi \in \mathbb{C}^{\nu}[[x]]$. On note $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu}) \in \mathbb{C}^{\nu}$. Pour toute suite $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in A^*(F)$, $s_i \in A(F)$, on note $\omega(\underline{s}) = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ le vecteur de $\mathbb{C}^{\nu}$ défini par $\omega_i = s_i.\underline{\lambda}$, et $\| \omega(\underline{s}) \| = \omega_1 + \cdots + \omega_r$.*

Si F est non résonnant, i.e.

$$\| \omega(\underline{s}) \| \neq 0 \text{ pour tout } \underline{s} \in A^*(F), \tag{V.28}$$

alors, il existe un automorphisme de linéarisation formelle de la forme

$$Ne = \sum_{\bullet} Ne^{\bullet}B_{\bullet},$$

avec, pour tout $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in A^*(F)$, $s_i \in A(F)$,

$$Ne^{\underline{s}} = \frac{e^{\omega_1+\cdots+\omega_r}}{(e^{-\omega_1}-1)\dots(e^{-(\omega_1+\cdots+\omega_r)}-1)}, \tag{V.29}$$

où $\omega_i = s_i.\underline{\lambda}$.

Démonstration. — On calcule le moule $(Ne^\bullet)^{-1}$ par récurrence sur la longueur des suites.

Pour $l(\omega) = 1$, on a

$$Ne^\omega (Ne^\omega)^{-1} = 1 + (Ne^\omega)^{-1},$$

d'où

$$(Ne^\omega)^{-1} = \frac{1}{e^\omega - 1}.$$

Pour $l(\underline{\omega}) = r$, $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$, on a

$$e^{\|\underline{\omega}\|}(Ne^{\underline{\omega}})^{-1} = (Ne^{\underline{\omega}})^{-1} + (Ne^{\omega_2,\ldots,\omega_r})^{-1},$$

soit

$$(Ne^{\underline{\omega}})^{-1} = \frac{1}{e^{\|\underline{\omega}\|} - 1}(Ne^{\omega_2,\ldots,\omega_r})^{-1}.$$

Une simple récurrence donne la formule suivante

$$(Ne^{\underline{\omega}})^{-1} = \frac{1}{(e^{\omega_1+\cdots+\omega_r} - 1)(e^{\omega_2+\cdots+\omega_r} - 1)\ldots(e^{\omega_r} - 1)}. \tag{V.30}$$

On déduit alors de la relation

$$(Ne^\bullet) \times (Ne^\bullet)^{-1} = 1^\bullet,$$

la formule de $Ne^\bullet$:

$$Ne^{\underline{\omega}} = \frac{e^{\omega_1+\cdots+\omega_r}}{(e^{-\omega_1} - 1)\ldots(e^{-(\omega_1+\cdots+\omega_r)} - 1)}. \tag{V.31}$$

Comme $Ne^\bullet$ vérifie l'équation (V.27), on déduit du théorème **??** que le moule $Ne^\bullet$ est symetrel, i.e. que Ne est bien un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$. □

3.3. Universalité du moule de linéarisation. — On peut qualifier le moule $Na^\bullet$ ou $Ne^\bullet$ de coefficient *universel*, et ceci pour au moins deux raisons :

– deux champs de vecteurs de même partie linéaire et de même alphabet ont *exactement* le même moule de linéarisation.

– tous les champs de vecteurs non résonants se linéarisent via un moule dont l'expression formelle est fixe.

Le calcul moulien permet donc d'isoler dans le problème de linéarisation, ce qui est intrinsèque, de ce qui ne l'est pas(19).

(19) Pour une utilisation de cette propriété d'universalité dans un problème de bifurcation de champs de vecteurs, on renvoie à [**5**] et [**6**].

4. Prénormalisation

4.1. Formes prénormales. — On définit, en suivant Ecalle-Vallet [**15**], la notion de *forme prénormale continue.*

Définition V.2. — *Une forme prénormale d'un champ X dont la partie semi-simple est diagonale est la donnée d'un champ de vecteur X_{pran} de la forme*

$$X_{\text{pran}} = X_{\text{lin}} + X_r, \quad \text{avec} \quad [X_{\text{lin}}, X_r] = 0. \tag{V.32}$$

Le champ X_r est donc uniquement constitué de monômes résonnants.

Remarque V.4. — *La classique forme normale de Poincaré-Dulac est une forme prénormale.*

Définition V.3. — *Soit X un champ de vecteur local de $\mathbb{C}^\nu$, sous forme préparée. Une forme prénormale est dite continue, si elle est continue par rapport aux opérateurs D_n, $\underline{n} \in A(X)$, le spectre de X étant fixé.*

Nous avons le résultat suivant :

Lemme V.3. — *Soit X un champ de vecteur local de $\mathbb{C}^\nu$, de partie linéaire diagonale X_{lin}, d'alphabet $A(X)$. Le champ*

$$X_{\text{pran}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet \in A^*(X)} \text{Pran}^\bullet D_\bullet, \tag{V.33}$$

où le moule $\text{Pran}^\bullet$ *est alternal et vérifie*

$$\text{Pran}^\omega = 0 \quad \text{si} \quad \| \omega \| \neq 0, \tag{V.34}$$

est une forme prénormale continue.

Démonstration. — Le champ X_{pran} est une forme prénormale car $X_{\text{pran}} - X_{\text{lin}}$ ne contient que des termes résonnants via (V.34). Par construction, X_{pran} est evidemment continue par rapport aux $D_{\underline{n}}$, $\underline{n} \in A(X)$, le spectre de X étant fixé. □

Remarque V.5. — *Le moule* $\text{Pran}^\bullet$ *dépend seulement de l'alphabet $A(X)$. Autrement dit, si deux champs de vecteurs locaux X_1 et X_2, de même partie linéaire, définissent le même alphabet, i.e. $A(X_1) = A(X_2)$, alors le moule* $\text{Pran}^\bullet$ *définissant la forme prénormale (V.33) est le même pour X_1 et X_2.*

4.2. Forme normale de Poincaré-Dulac. — La forme normale de *Poincaré-Dulac* est construite par itération. On rappelle ici le procédé de construction :

On associe à X un champ dit *simplifié* de la forme

$$X_{sam} = \left(\exp \sum_n^* \frac{D_n}{n.\lambda}\right) X \left(\exp \sum_n^* \frac{D_n}{n.\lambda}\right), \tag{V.35}$$

où $\sum\limits_n^*$ porte sur tous les multi-entiers $n = (n_1, \dots, n_\nu) \in \Omega$ tels que $\omega \neq 0$. C'est le procédé classique de supression des termes non résonnants du champ.

On peut itérer ce processus et passer à la limite. On appelle forme normale de Poincaré-Dulac le champ limite et on le note X_{tram}. On a donc

$$X \to X^1_{sam} \to X^2_{sam} \to \cdots \to X_{tram}. \tag{V.36}$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème V.3. — *La forme normale de Poincaré-Dulac est une forme prénormale continue, appelée forme prénormale élaguée et notée X_{tram} :*

$$X_{tram} = X_{lin} + \sum_\bullet Tram^\bullet D_\bullet. \tag{V.37}$$

La démonstration repose sur une réecriture de la construction classique en terme de moules et comoules, faisant apparaitre ainsi les constantes universelles $Tram^\bullet$.

Remarque V.6. — *i. La forme normale de Poincaré-Dulac n'est pas une forme normale dans le sens de Baider, Sanders ou Ecalle. C'est pour eviter toute confusion qu'Ecalle appelle cet objet forme prénormale élaguée. Dans la suite de cet article, nous utiliserons la terminologie d'Ecalle.*

ii. Les constantes universelles $Tram^\bullet$ sont explicites (voir le lemme V.5).

Démonstration. — Elle repose en partie sur le lemme suivant :

Lemme V.4. — *Le champ simplifié X_{sam} associé à X possède un développement moulien de la forme*

$$X_{sam} = X_{lin} + \sum Sam^\bullet D_\bullet, \tag{V.38}$$

où le moule $Sam^\bullet$ est défini par

- *$Sam^\emptyset = 0$*
- *$Sam^\omega = 0$ si $\dot\omega \neq 0$ et $Sam^\omega = 1$ si $\omega = 0$.*
- *si $l(\underline{\omega}) \geq 2$, et tous les ω_i, $1 \leq i \leq r$ sont non nuls, alors*

$$Sam^{\underline{\omega}} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k}(\omega_k(r-k) - \omega_{k+1} - \cdots - \omega_r)}{(k-1)!(r-k+1)!}. \tag{V.39}$$

– *Si un seul* ω_i *s'annule,*

$$\text{(V.40)} \qquad Sam^{\underline{\omega}} = \frac{(-1)^{r-1}}{(i-1)!(r-i)!\omega_1 \dots \omega_{i-1}\omega_{i+1}\dots\omega_r}.$$

– *Enfin, si plus d'un* ω_i *s'annule, alors* $Sam^{\underline{\omega}} = 0$.

Remarque V.7. — *Le champ simplifié possède un développement moulien mais n'est pas une forme prénormale. Il contient des opérateurs non résonnants.*

Démonstration. — On commence par noter que $\Theta = \sum_{n\in\mathcal{M}}^{*} \frac{D_n}{\omega}$ peut s'écrire comme

$$\text{(V.41)} \qquad \Theta = \sum_{n\in S_{\mathcal{M}}} J^{\bullet} D_{\bullet},$$

où le moule $J^{\bullet}$ est défini par

$$J^{\bullet} = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \text{ si } \bullet = \omega \text{ et } \omega \neq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'exponentielle de Θ possède un développement moulien de la forme

$$\exp \Theta = \sum_{n\in S_{\mathcal{M}}} \exp(J^{\bullet}) D_{\bullet}.$$

Par définition, on a

$$\exp(\Theta)^{\underline{\omega}} = (1^{\bullet})^{\underline{\omega}} + \frac{1}{2!}(J^{\bullet} \times J^{\bullet})^{\underline{\omega}} + \dots.$$

Or, un simple calcul donne

$$\underbrace{J^{\bullet} \times \dots \times J^{\bullet}}_{r facteurs} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_r} \text{ si } \underline{\omega} = \omega_1 \dots \omega_r \text{ avec tous les } \omega_i \neq 0,\ i = 1, \dots, r, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$\exp \Theta^{\bullet} = \begin{cases} 1 \text{ si } \bullet = \emptyset, \\ \frac{1}{r!\omega_1 \dots \omega_r} \text{ si } \bullet = \omega_1 \dots \omega_r, \text{ avec tous les } \omega_i \neq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par définition de X_{sam}, nous avons

$$X_{sam} = (\sum \exp(J^{\bullet}) B_{\bullet}) X (\sum \exp(-J^{\bullet}) B_{\bullet}).$$

Or $X = X_{lin} + \sum_{n\in\Omega} D_n$, qui possède l'écriture moulienne

$$X = X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} D_{\bullet},$$

où $I^{\bullet}$ est le moule défini par $I^{\omega_1} = 1$ et $I^{\omega} = 0$ si $l(\omega) \geq 2$. On a donc l'expression moulienne complète de X_{sam} :

$$X_{sam} = \left(\sum_{\bullet} \exp(J^{\bullet}) D_{\bullet}\right) \left(X_{lin} + \sum I^{\bullet} D_{\bullet}\right) \left(\sum_{\bullet} \exp(-J^{\bullet}) D_{\bullet}\right).$$

Comme

$$\left(\sum_{\bullet} \exp(J^\bullet) D_\bullet\right)(X_{lin})\left(\sum_{\bullet} \exp(-J^\bullet) D_\bullet\right) = \sum_{\bullet} \exp(J^\bullet) \times \bigtriangledown \exp(-J^\bullet) D_\bullet,$$

avec $\bigtriangledown$ la dérivation sur l'algèbre des moules définie par

$$\bigtriangledown M^\omega = \omega M^\omega,$$

on obtient l'équation moulienne suivante pour $Sam^\bullet$:

$$Sam^\bullet = \exp J^\bullet \times \bigtriangledown \exp(-J^\bullet) + \exp J^\bullet \times I^\bullet \times \exp(-J^\bullet). \tag{V.42}$$

Cette équation permet de calculer l'expression du moule $Sam^\bullet$ par récurrence sur la longueur des séquences.

Le moule $C^\bullet = \exp J^\bullet \times I^\bullet$ est défini par

$$C^\bullet = \begin{cases} 0 \text{ si au moins un des } \omega_i,\ 1 \leq i \leq r-1 \text{ est nul,} \\ \dfrac{1}{(r-1)!\omega_1 \dots \omega_{r-1}} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le moule $D^\bullet = C^\bullet \times \exp(-J^\bullet)$ est donc défini par $D^\emptyset = 0$, $D^\omega = 1$. Pour une suite $\underline{\omega}$ de longueur $r \geq 2$, on a

$$D^{\omega_1 \dots \omega_r} = C^{\omega_1}(\exp(-J^\bullet))^{\omega_2 \dots \omega_r} + C^{\omega_1 \omega_2}(\exp(-J^\bullet))^{\omega_3 \dots \omega_r} + \dots + C^{\omega_1 \dots \omega_r}.$$

On a plusieurs cas :

– si au moins un des ω_i est nul, $1 \leq i \leq r-1$, alors tous les $C^{\omega_1 \dots \omega_j}$, avec $j \geq i+1$ son nuls, ainsi que tous les $(\exp(-J^\bullet))^{\omega_k \dots \omega_r}$ pour $k \leq i$. Donc, on a

$$D^{\omega_1 \dots \omega_r} = C^{\omega_1 \dots \omega_i}(\exp(-J^\bullet)^{\omega_{i+1} \dots \omega_r}.$$

On a donc :

$$D^{\omega_1 \dots \omega_r} = \begin{cases} 0 \text{ si au moins deux } \omega_i \text{ sont nuls.} \\ \dfrac{(-1)^{r-i}}{(i-1)!(r-i)![\omega_1 \dots \omega_{i-1}][\omega_{i+1} \dots \omega_r]} \text{ si un seul } \omega_i,\ 1 \leq i \leq r-1, \text{ est nul.} \end{cases}$$

– si seul ω_r est nul, alors $D^{\omega_1 \dots \omega_r} = C^{\omega_1 \dots \omega_r}$ et on a

$$D^{\omega_1 \dots \omega_r} = \frac{1}{(r-1)!\omega_1 \dots \omega_{r-1}}.$$

– si aucun ω_i n'est nul alors

$$\begin{aligned} D^{\omega_1 \dots \omega_r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-k)!\omega_2 \dots \omega_r} & + \frac{1}{\omega_1} \times \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!\omega_3 \dots \omega_r} + \dots \\ & + \frac{1}{(r-2)!\omega_1 \dots \omega_{r-2}} \times \frac{-1}{\omega_r} + \frac{1}{(r-1)!\omega_1 \dots \omega_{r-1}}, \end{aligned}$$

soit

$$D^{\omega_1 \dots \omega_r} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_r} \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^{r-k}\omega_k}{(k-1)!(r-k)!}.$$

De même, on montre facilement que $E^\bullet = \bigtriangledown \exp J^\bullet$ est défini par $E^\emptyset = 0$, et plus généralement

$$E^{\omega_1\dots\omega_r} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si au moins un des } \omega_i,\ 1 \leq i \leq r, \text{ et nul}\,; \\ \dfrac{(\omega_1+\dots+\omega_r)(-1)^r}{r!\omega_1\dots\omega_r}. \end{array} \right.$$

On en déduit l'expression du moule $F^\bullet = \exp(J^\bullet)\times E^\bullet$. On a $F^\emptyset = 0$ et $F^\omega = E^\omega$ donc $F^\omega = 0$ si $\omega = 0$ et $F^\omega = -1$ sinon ; pour un mot de longueur $r \geq 1$, on a :

$$F^{\omega_1\dots\omega_r} = (\exp(J^\bullet))^\emptyset E^{\omega_1\dots\omega_r} + (\exp(J^\bullet))^{\omega_1} E^{\omega_2\dots\omega_r} + \dots + (\exp(J^\bullet))^{\omega_1\dots\omega_{r-1}} E^{\omega_r},$$

donc $F^{\omega_1\dots\omega_r} = 0$ si un au moins des ω_i est nul. Si aucun ω_i n'est nul, alors

$$\begin{aligned} F^{\omega_1\dots\omega_r} &= \frac{(\omega_1+\dots+\omega_r)(-1)^r}{r!\omega_1\dots\omega_r} + \dots + \frac{(-1)\omega_r}{(r-1)!\omega_1\dots\omega_r}, \\ &= \frac{1}{\omega_1\dots\omega_r}\sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^{r-k+1}(\omega_k+\dots+\omega_r)}{(r-k+1)!(k-1)!}. \end{aligned}$$

$Sam^\bullet = F^\bullet + D^\bullet$, on a

$$Sam^\emptyset = F^\emptyset + D^\emptyset = 0,$$

et

$$Sam^\omega = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega = 0., \\ 0 \text{ si } \omega \neq 0. \end{array} \right.$$

Pour toute suite de longueur $r \geq 2$, on a :

– si au moins deux ω_i sont nuls, alors $F^{\underline{\omega}} = D^{\underline{\omega}} = 0$, donc $Sam^{\underline{\omega}} = 0$.

– si un seul ω_i est nul, $F^{\underline{\omega}} = 0$ et

$$Sam^{\underline{\omega}} = \frac{1}{(i-1)!\omega_1\dots\omega_{i-1}}\frac{(-1)^{r-1}}{(r-i)!\omega_{i+1}\dots\omega_r}.$$

– si tous les ω_i, $1 \leq i \leq r$, sont non nuls, alors

$$Sam^{\omega_1\dots\omega_r} = \frac{1}{\omega_1\dots\omega_r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{r-k}(\omega_k(r-k) - \omega_{k+1} - \dots - \omega_r)}{(k-1)!(r-k+1)!}.$$

On en déduit le lemme. □

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que par itération les champs X^r_{sam} garde une forme de type (V.38), de même pour X_{tram} :

$$X_{tram} = X_{lin} + \sum_\bullet Tram^\bullet D_\bullet. \tag{V.43}$$

On en déduit le théorème. □

Les moules de la forme élaguée ont une expression algébrique simple :

Lemme V.5. — *Le moule de la forme élaguée est définie par*

$$Tram^{\omega} = (Sam^{\bullet})^{\circ l(\omega)}, \tag{V.44}$$

où $(Sam^{\bullet})^{\circ n} = Sam^{\bullet} \circ \cdots \circ Sam^{\bullet}$, *n fois.*

Remarque V.8. — *Le lemme précédent traduit simplement le fait qu'à la* r*-ième étape, on ne touche pas les composantes de degré inférieur à* r *du champ.*

Le calcul explicite des moules $Tram^{\bullet}$ est possible car on a une expression exacte des moules du champ simplifié. Il n'est pas nécessaire d'itérer la composition du moule Sam. En effet, nous avons les deux relations suivantes :

$$Tram^{\bullet} = Tram^{\bullet} \circ Sam^{\bullet}, \tag{V.45}$$

$$Tram^{\bullet} = Sam^{\bullet} \circ Tram^{\bullet}, \tag{V.46}$$

qui proviennent toutes les deux de la stabilisation des composés itérés du moule $Sam^{\bullet}$ sur $Tram^{\bullet}$.

De ces deux formules, seule la première fournit une relation de récurrence. En effet, on a :

$$Tram^{\omega_1 \dots \omega_n} = \sum_{u^1 \dots u^r = \omega} Tram^{\|u^1\| \cdots \|u^r\|} Sam^{u^1} \dots Sam^{u^r}, \tag{V.47}$$

$$Tram^{\omega_1 \dots \omega_n} = \sum_{u^1 \dots u^r = \omega} Sam^{\|u^1\| \cdots \|u^r\|} Tram^{u^1} \dots Tram^{u^r}. \tag{V.48}$$

Si au moins un $\omega_i \neq 0$, alors le moule $Tram^{\omega_1 \dots \omega_r}$ est défini par

$$Tram^{\omega_1 \dots \omega_n} = \sum_{u^1 \dots u^r = \omega;\ r \leq n-1} Tram^{\|u^1\| \cdots \|u^r\|} Sam^{u^1} \dots Sam^{u^r}. \tag{V.49}$$

Par ailleurs si tous les ω_i sont nuls, on a par alternalité pour toute suite de longueur ≥ 2 :

$$Tram^{0 \dots 0} = 0. \tag{V.50}$$

Remarque V.9. — *Le moule* $Tram$ *est associé à une forme prénormale. Il est donc nul sur toute suite* ω *telle que* $\| \omega \| \neq 0$, *i.e. sur les suites non résonantes. Malheureusement, si* $\| \omega \| = 0$, *alors le moule* $Tram^{\omega}$ *disparait dans la seconde équation.*

5. Arborification : une introduction

Un problème important dans la normalisation des champs de vecteurs ou difféomorphismes, est celui de la convergence/divergence de l'automorphisme de conjugaison. Ce problème est à la source des travaux de Siegel, Bruyno, Russman, Arnold, Moser et Yoccoz. La méthode d'arborification/coarborification permet de démontrer la convergence (lorsque c'est le cas) des séries formelles construites via le calcul moulien.

Pourquoi a-t-on besoin d'arborifier/corarborifier la série pour établir sa convergence ?

Les séries obtenues par le calcul moulien se prettent mal à l'analyse. Une semi-norme sur les opérateurs de $\mathbb{C}\{x\}$ étant donnée, on obtient, en général, de très mauvaises estimations sur la semi-norme de la série. Cet artefact est dû à la majoration directe d'opérateurs de la forme $B_1 \dots B_n$ qui ne sont pas homogènes. Une idée est donc de reécrire la série en faisant apparaître des opérateurs homogènes. Le codage de ce procédé est la méthode d'*arborification.*

Commençons par définir une norme :

Définition V.4. — *Soient U et V deux voisinages compacts de 0 dans $\mathbb{C}^\nu$, tels que $V \subset U$. Pour tout germe de fonction ϕ de $\mathbb{C}\{x\}$ en 0, on définit*

$$\| \phi \|_U = \sup_{x\in U} \mid \phi(x) \mid . \tag{V.51}$$

De même, pour tout opérateur P de $\mathbb{C}\{x\}$ dans lui-même, on définit

$$\| P \|_{U,V} = \sup_{\phi \mid \, \|\phi\|_U \leq 1} \| P.\phi \|_V . \tag{V.52}$$

On dit que la série d'opérateurs $\sum_{\underline{n}} P_{\underline{n}}$ est *normalement convergente* si la famille $(\| P_{\underline{n}} \|)_{\underline{n}}$ est sommable pour une paire (U, V) au moins.

5.1. Convergence sans arborification : le théorème de Poincaré. — La démonstration de la convergence normale des séries mouliennes ne nécessite pas toujours le recours à la méthode d'arborifcation. C'est le cas des séries du théorème de linéarisation de Poincaré. Vue la forme du moule intervenant dans le problème de linéarisation, cette convergence ne peut avoir lieu que sous une contrainte sur la vitesse à laquelle les $\omega(\underline{n})$ peuvent s'approcher de 0 lorsque $\| \underline{n} \|$ augmente. Cette "vitesse" dépend essentiellement de la disposition des valeurs propres du spectre de la partie linéaire du champ.

Définition V.5. — *Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ une collection de valeurs propres dans $\mathbb{C}^\nu$. On définit :*

– le domaine de Poincaré $\mathcal{P}$ comme l'ensemble des $\underline{\lambda}$ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0.

– le domaine de Siegel $\mathcal{S}$, comme le complémentaire du précédent.

Une condition de contrôle très forte du spectre est l'*absence de petits diviseurs.*

Définition V.6. — *On dit que le champ X ne contient pas de petits diviseurs s'il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\forall \omega \in \Omega, \ \mid \omega \mid \geq C.$$

Si le champ ne possède pas de petits diviseurs, il est nécessairement non résonant, donc formellement linéarisable d'après le théorème de Poincaré (voir théorème V.2). La convergence de la série normalisante est assurée par le théorème suivant :

Théorème V.4. — *Soit X un champ de vecteur ne contenant pas de petits diviseurs, et dont le spectre est dans le domaine de Poincaré. Alors, l'automorphisme de linéarisation du théorème de Poincaré (théorème V.2) est analytique.*

La démonstration suit la démarche usuelle, mais sur les moules. Elle va nous permettre de dégager des majorations importantes pour la suite.

Démonstration. — La première étape consiste à se ramener, via un changement de variables analytique (en fait, même algébrique) à une situation où l'alphabet est tel que les ω sont toutes de partie réelle positive. C'est finalement, uniquement ce fait qui assure la convergence de la normalisation[20].

En effet, comme les valeurs propres λ_i sont dans $\mathcal{P}$, il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_i \in P_\theta = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(ze^{i\theta}) > 0\}.$$

On peut donc, via une rotation, se ramener au cas où toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Il existe donc une constante $\rho > 0$ telle que pour tout i, $\mathrm{Re}(\lambda_i) > \rho$. Une conséquence importante est qu'il n'existe qu'un nombre fini de ω dans Ω tels que $\mathrm{Re}(\omega) < 0$. Il existe donc un changement de variable polynomial tel que X s'écrive

$$X = X_{\mathrm{lin}} + \sum_{n \in P(X)} B_n,$$

où $P(X)$ est le nouvel alphabet tel que

$$\forall n \in P(X), \ \mathrm{Re}(\omega(n)) > 0.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme V.6. — *Pour toute suite $\underline{n}$ de longueur r, on a*

$$\text{(V.53)} \qquad \mid Na^{\underline{n}} \mid \leq \frac{1}{r! C_1^r}, \ \mid (Na^{-1})^{\underline{n}} \mid \leq \frac{1}{r! C_1^r}, \ C_1 > 0,$$

[20] Nous allons le voir, ceci implique que les combinaisons linéaires des $\omega \in \Omega$, intervenant dans le moule de linéarisation, ne peuvent pas être trop petites.

$$\| B_{\underline{n}} \|_{U,V} \leq r! C_2^{N(\underline{n})} \| B_{n^1} \|_{U,V} \cdots \| B_{n^r} \|_{U,V},\ C_2 > 0, \tag{V.54}$$

$$\| B_n \|_{U,V} \leq (C_{U,V})^{|n|},\ C_{U,V} > 0, \tag{V.55}$$

$$c(N) \leq (C_3)^{N(\underline{n})},\ C_3 > 0, \tag{V.56}$$

où $\mid n \mid = n_1 + \cdots + n_\nu$ *et* $N(\underline{n}) = \mid n^1 \mid + \cdots + \mid n^r \mid$ *est le poids de* $\underline{n}$ *;* $c(N)$ *est le nombre de mots de poids* N*.*

La démonstration est donnée dans la prochaine section.

On démontre la convergence normale du normalisateur Na. On a

$$\begin{aligned} \| Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \| &\leq \frac{1}{r! C_1^r} r! \| B_{n^1} \|_{U,V} \cdots \| B_{n^r} \|_{U,V} C_2^N, \\ &\leq \frac{1}{C_1^r} (C_{U,V})^{rN} C_2^N. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l(\underline{n})=r,\ N(\underline{n})=N} Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \right\|_{U,V} &\leq \sum_{l(\underline{n})=r,\ N(\underline{n})=N} \| Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \|_{U,V}, \\ &\leq \frac{c(N)}{C_1^r} C_{U,V}^{rN} C_2^N, \\ &\leq (C_3 C_2)^N \frac{(C_{U,V}^r)^N}{C_1^r}. \end{aligned}$$

Comme $r \leq N$, on a

$$\frac{1}{C_1^r} \leq \frac{1}{C_1^N}.$$

On en déduit

$$\left\| \sum_{l(\underline{n})=r,\ N(\underline{n})=N} Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \right\|_{U,V} \leq \left(\frac{C_3 C_2 C_{U,V}^r}{C_1} \right)^N.$$

Pour un bon choix de (U, V), on peut rendre $C_{U,V}$ aussi petit que l'on veut. La série est donc normalement convergente. □

5.1.1. Démonstration du lemme V.6. — Par hypothèse, tous les $\omega(n)$ sont de parties réelles strictement positives. Par ailleurs, l'absence de petits diviseurs impose que pour tout ω, $\mid \omega \mid \geq C > 0$. On a donc

$$\forall \omega \in P(X),\ \mathrm{Re}(\omega) \geq C.$$

On en déduit pour tout r,

$$\begin{array}{rcl} \mid \omega_1 + \cdots + \omega_r \mid & \geq & \mathrm{Re}(\omega_1 + \cdots + \omega_r), \\ & \geq & rC. \end{array}$$

On a donc

$$\mid Na^{\underline{n}} \mid \leq \frac{1}{r!C^r}.$$

5.2. Le problème des petits diviseurs et le théorème de Bruyno. — L'existence des petits diviseurs conduit à des difficultés analytiques sérieuses. Nous avons le théorème de Siegel :

Théorème V.5. — *En présence de petits diviseurs, les séries mouliennes de Θ et Θ^{-1} sont génériquement divergentes.*

Néanmoins, on imagine bien qu'un contrôle de la vitesse de convergence des $\omega(\underline{n})$ vers 0 lorsque $\underline{n}$ augmente doit permettre de rétablir la convergence de la série. C'est effectivement ce qui se passe, sous une condition, appelée *condition diophantienne de Bruyno.*

On note $\omega(k)$ la quantitée définie par

$$\omega(k) = \inf \left\{ \underline{\lambda}.m = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i m_i, \ \mid m \mid \leq 2^{k+1} \text{ et } \underline{\lambda}.m \neq 0 \right\}, \tag{V.57}$$

où les m_i sont tous positifs, sauf au plus un qui peut valoir -1, de somme $\mid m \mid = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \geq 0$.

La condition diophantienne de Bruyno est :

$$\text{La série } S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(1/\omega(k))}{2^k} \text{ est convergente.} \tag{B}$$

Le théorème de Bruyno s'énonce alors comme suit :

***Théorème V.6* (Bruyno)**. — *Soit X un champ de vecteurs analytique dont le spectre de la partie linéaire vérifie la condition (B). Alors, ce champ est analytiquement linéarisable.*

La démonstration originale de Bruyno est longue et difficile. Une présentation claire et soignée de son travail est donnée par Martinet [**22**].

Ce que peut apporter le calcul moulien dans ce problème, c'est un cadre conceptuel clair qui guide les différents calculs et estimations nécessaires à la démonstration.

En tout premier lieu, il faut comprendre pourquoi ce problème est beaucoup plus difficile que le théorème de convergence sous la condition de Poincaré.

Les majorations du lemme V.6 concernant les opérateurs $B_{\underline{n}}$ sont les mêmes pour le théorème de Bruyno, car elles ne dépendent pas du spectre de la partie linéaire. Le seul changement est dans l'estimation de la taille du moule de linéarisation $Na^{\bullet}$, qui dépend fortement des propriétés arithmétiques des ω.

Lemme V.7. — *Pour toute suite* $\underline{n}$*, on a*

$$\mid Na^{\underline{n}} \mid \leq Q^{N(\underline{n})},\ Q>0. \tag{V.58}$$

Une estimation directe de la norme de Na donne, en gardant les inégalités (V.54), (V.55), (V.56) du lemme V.6,

$$\left\| \sum_{l(\underline{n})=r,\ N(\underline{n})=N} Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \right\|_{U,V} \leq \left(r! Q C_3 C_2 C_{U,V}^r \right)^N ,$$

ce qui ne permet pas de conclure quand à la convergence de la série.

Les majorations précédentes ne peuvent pas être améliorer. Autrement dit, le théorème de Bruyno est inaccessible via l'expression moulienne initiale du normalisateur Na. Si convergence il y a, il faut affiner l'analyse de cette série.

La méthode d'*arborification* donne un procédé algébrique pour étudier la convergence de ces séries. Néanmoins, et c'est un point important, cette méthode *prend sa source dans un problème d'analyse*, et sa mise au point n'est pas un problème algébrique(21). Essentiellement, la question à laquelle nous allons répondre est la suivante : comment affiner notre estimation de la norme de la série moulienne Na ?

5.3. Premier pas : homogénéité et symétrie. — La construction du normalisateur Na utilise des opérateurs différentiels homogènes en degré, B_n, $n \in A(X)$. Les différentes combinaisons $B_{\underline{n}}$ de ces opérateurs sont encore des opérateurs différentiels homogènes de degré $\| \underline{n} \|$. Peut-on préciser ce point ? Il suffit de faire un calcul en longueur 2 pour avoir une idée du résultat général.

(21)Du fait de l'utilisation d'arbres et autres suites arborifiées, les spécialistes des algèbres de Hopf y ont souvent vu un relicat des bases de Hall. Or, l'arborification n'a strictement rien à voir avec ce problème, qui lui, est purement algébrique. Bien entendu, une fois la méthode formalisée, rien n'empéche une étude purement algébrique de ses propriétés, comme dans [**16**] par exemple.

Soit B_1 et B_2 deux opérateurs de degré n^1 et n^2 respectivement de la forme

$$B_i = \sum_{j=1}^{\nu} B_i(x_j)\partial_{x_j},\ i = 1, 2.$$

L'opérateur composé $B_{(1,2)} = B_1 B_2$ s'écrit

$$B_{(1,2)} = \sum_{i,j} B_1(x_i)\partial_{x_i}[B_2(x_j)]\partial_{x_j} + \sum_{i,j} B_1(x_i)B_2(x_j)\partial^2_{x_i x_j}. \tag{V.59}$$

De la même manière, on a :

$$B_{(2,1)} = \sum_{i,j} B_2(x_i)\partial_{x_i}[B_1(x_j)]\partial_{x_j} + \sum_{i,j} B_1(x_i)B_2(x_j)\partial^2_{x_i x_j}. \tag{V.60}$$

On voit que le second terme du développement de $B_{(2,1)}$ est le même que celui de $B_{(1,2)}$. Devant ce terme, le coefficient est $Na^{(1,2)} + Na^{(2,1)}$. Comme le moule $Na^\bullet$ est symétral, on a $Na^{(1,2)} + Na^{(2,1)} = Na^1 Na^2$.

Que faut-il retenir de ce calcul ?

On peut décomposer les $B_{\underline{n}}$ de façon à profiter des symétries du moule $Na^\bullet$ pour obtenir des majorations plus fines.

Avant de préciser la décomposition, on introduit la notion d'*ordre* d'un opérateur différentiel.

Définition V.7. — *Pour tout ν-uplet $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_\nu)$ d'entiers positifs, on note $\partial_x^\delta = \partial_{x_1}^{\delta_1} \dots \partial_{x_\nu}^{\delta_\nu}$. On dit que ∂_x^δ est d'ordre $\mid \delta \mid = \delta_1 + \dots + \delta_\nu$. Un opérateur différentiel est homogène en ordre, d'ordre d, si il est de la forme*

$$B = \sum_{\delta,\ |\delta|=d} b_\delta(x)\partial_x^\delta.$$

Quelle-est la décomposition adéquate des opérateurs $B_{\underline{n}}$? On peut imposer deux contraintes naturelles dans le cadre de ce problème :

i) On isole dans les $B_{\underline{n}}$ des opérateurs différentiels homogènes en *ordre*, ceux-ci étant déja homogènes en degré.

ii) Les coefficients de ces opérateurs sont des produits de termes dépendants des B_{n^i}.

La condition ii) est nécessaire si l'on veut facilement majorer la norme de ces opérateurs, ce qui est essentiel pour notre propos.

5.4. Codage du procédé de décomposition. — Le procédé de décomposition peut se coder via deux opérations sur les opérateurs homogènes en ordre et en degré, et donne naissance, une fois formalisé, à la méthode d'arborification.

Définition V.8. — *Soient B_1 et B_2 deux opérateurs différentiels homogènes en degré et en ordre,*

$$B_i = \sum_{\delta,\ |\delta|=d_i} b_{i,\delta}(x)\partial_x^{\delta},\ i=1,2,$$

où les $b_{i,\delta}$ sont dans $\mathbb{C}[[x]]$. On note

$$B_{(12)^<} \sum_{\delta,\gamma} b_{1,\delta}(x)\partial_x^{\delta}[b_{2,\gamma}(x)]\partial_x^{\gamma},$$

et

$$B_{1\oplus 2} = \sum_{\delta,\gamma} b_1^{\delta}(x) b_2^{\gamma}(x)\partial_x^{\delta+\gamma}.$$

Par récurrence sur la longueur des suites, on peut coder l'ensemble des parties homogènes en degré d'un opérateur $B_{\underline{n}}$.

Notons $B_i = \sum_{i=1}^{\nu} b_i(x)\partial_{x_i}$, $i=1,2,3$. On a

$$\begin{array}{rcl} B_{1,2,3} & = & B_1\left(\sum_{j,k} B_2(x_j)\partial_{x_j}[B_3(x_k)]\partial_{x_k} + \sum_{j,k} B_2(x_j)B_3(x_k)\partial^2_{x_jx_k}\right), \\ & = & \sum_{i,j,k} B_1(x_i)\big(\partial_{x_i}[B_2(x_j)]\partial_{x_j}[B_3(x_k)]\partial_{x_k} \\ & & +B_2(x_j)\partial^2_{x_ix_j}[B_3(x_k)]\partial_{x_k} \\ & & +B_2(x_j)\partial_{x_j}[B_3(x_k)]\partial^2_{x_ix_k} \\ & & +\partial_{x_i}[B_2(x_j)]B_3(x_k)\partial^2_{x_jx_k} \\ & & +B_2(x_j)\partial_{x_i}[B_3(x_k)]\partial^2_{x_jx_k} \\ & & +B_2(x_j)B_3(x_k)\partial^3_{x_ix_jx_k}\big). \end{array}$$

On a deux opérateurs différentiels d'ordre 1, trois d'ordre 2 et un d'ordre 3. Soit, en reprenant les notations de la définition V.8 :

$$B_{1,2,3} = B_{(1,2,3)^<} + B_{(1\oplus 2)3)^<} + B_{(2,3)^<\oplus 1} + B_{(1,2)^<\oplus 3} + B_{(1,3)^<\oplus 2} + B_{1\oplus 2\oplus 3}.$$

La mise en forme de cette décomposition nécessite un alphabet nouveau, dit *arborifié*.

Définition V.9. — *Une appelle suite arborescente, et on note $\underline{\omega}^<$, une suite construite sur $A(X)$ avec les symboles $<$ et $\oplus$. On note $\mathrm{Arb}(X)$ l'ensemble des suites arborescentes.*

Si $\underline{n} \in A(X)^*$, on note $\mathrm{Arb}(\underline{n})$ l'ensemble des $\underline{a}^< \in \mathrm{Arb}(X)$ intervenant dans la décomposition de $B_{\underline{n}}$. On a donc

$$B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{a}^< \in \mathrm{Arb}(\underline{n})} B_{\underline{a}^<}.$$

On peut donc réecrire la série moulienne de Na sous la forme

$$Na = \sum_{\underline{n} \in A^*(X)} Na^{\underline{n}} B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{a}^< \in \mathrm{Arb}(X)} Na^{\underline{a}^<} B_{\underline{a}^<}.$$

Les coefficients $Na^{\underline{a}^<}$ définissent un moule sur $\mathrm{Arb}(X)$, noté $Na^{\bullet^<}$.

Définition V.10. — *Le moule $Na^{\bullet^<}$ est appelé moule arborifié de $Na^\bullet$.*

Le moule arborifié est bien entendu une combinaison linéaire du moule initial. Si on note $X(\underline{a}^<)$ l'ensemble des suites $\underline{n}$ de $A(X)^*$ telles que $\underline{a}^< \in \mathrm{Arb}(\underline{n})$, on a :

$$Na^{\underline{a}^<} = \sum_{\underline{n} \in X(\underline{a}^<)} Na^{\underline{n}}.$$

Il nous reste à formaliser cette construction, afin de simplifier sa présentation.

5.5. Définition formelle de l'arborification. — Les définitions précédentes sont liées au codage de la construction des opérateurs différentiels homogènes en ordre et degré. On peut evidemment donner une définition purement algébrique de ces objets, comme par exemple les suites arborescentes.

Définition V.11. — *Une suite arborescente sur $A(X)$ est une suite $\underline{n}^<$ d'éléments de $A(X)$, avec sur les indices un ordre partiel appelé ordre arborescent : chaque i de $\{1,\dots,r\}$ possède au plus un conséquent noté i_+.*

On note $\underline{n}_1^< \oplus \underline{n}_2^<$ l'union disjointe de $\underline{n}_1^<$ et $\underline{n}_2^<$; dans cette suite l'ordre partiel interne est conservé, mais les éléments de $\underline{n}_1^<$ et $\underline{n}_2^<$ sont incomparables.

Un $\underline{n}^<$ est dit irréductible s'il ne possède pas de décomposition non triviale $\underline{n}_1^< \oplus \underline{n}_2^<$, autrement dit s'il possède un plus grand élément.

On peut toujours représenter une suite arborescente par un arbre.

Les opérateurs arborifiés peuvent alors se définir directement par récurrence.

Définition V.12. — *Pour une suite arborescente donnée $\underline{n}^< = (n^1,\dots,n^r)^<$, on définit $B_{\underline{n}^<}$ comme étant l'unique opérateur vérifiant les trois propriétés suivantes :*

– $B_{\underline{n}^<}(\phi\psi) = \displaystyle\sum_{\underline{n}_1^< \oplus \underline{n}_2^< = \underline{n}^<} \left(B_{\underline{n}_1^<}\phi\right)\left(B_{\underline{n}_2^<}\psi\right).$

– *Si la suite* $\underline{n}^<$ *se décompose en eaxctement* d *suites irréductibles non vides :*

$$\underline{n}^< = \underline{n}_1^< \oplus \cdots \oplus \underline{n}_d^<,$$

alors $B_{\underline{n}^<}$ *est un opérateur différentiel homogène d'ordre* d.

– *Si* $\underline{n}^< = \underline{n}_1^< n_0$ *alors*

$$B_{\underline{n}^<} = B_{\underline{n}_1^<} B_{n_0}.$$

Ces trois propriétés définissent bien $B_{\underline{n}^<}$ qui se calcule par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
B_{\underline{n}^<} &= \sum_{i=1}^{\nu} (B_n(x_i))\partial_{x_i} \text{ si } l(\underline{n}^<) = 1,\\
B_{\underline{n}^<} &= \sum_{i=1}^{\nu} B_{\underline{n}_1^<}(B_{n_0}(x_i))\partial_{x_i} \text{ si } \underline{n}^< = \underline{n}_1^< n_0.\\
B_{\underline{n}^<} &= \frac{1}{d_1! \dots d_s!} \sum_{1\leq i_1 \dots i_d \leq \nu, 1\leq j_1 \dots j_d \leq d} \left(B_{\underline{n}_{j_1}^<}(x_{i_1})\right) \dots \left(B_{\underline{n}_{j_d}^<}(x_{i_d})\right) \partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_d}},
\end{aligned}$$

où d_i est le nombre de suites arborescentes identiques $\underline{n}_i^<$ qui interviennent dans la décomposition de $\underline{n}^< = \underline{n}_1^< \oplus \dots \underline{n}_d^<$.

Pour une suite arborescente $\underline{a}^< = (a^1, \dots, a^r)^<$ et une suite $\underline{n} = (n^1, \dots, n^{r'})$, on note $\text{proj}\begin{pmatrix} \underline{a}^< \\ \underline{n} \end{pmatrix}$ le nombre de bijection de $\{1, \dots, r\}$ dans $\{1, \dots, r'\}$ (nul si $r \neq r'$) vérifiant :

$$\text{si } i_1 < i_2 \text{ dans } \underline{a}^<, \text{ alors } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) \text{ dans } \underline{n} \text{ et } n^j = a^i \text{ si } j = \sigma(i).$$

On a alors les relations

$$S^{\underline{a}^<} = \sum_{\underline{n}\in A(X)^*} \text{proj}\begin{pmatrix} \underline{a}^< \\ \underline{n} \end{pmatrix} S^{\underline{n}},$$

pour tout moule $S^\bullet$, et

$$B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{a}^< \in \text{Arb}(X)} \text{proj}\begin{pmatrix} \underline{a}^< \\ \underline{n} \end{pmatrix} B_{\underline{a}^<}.$$

5.6. Démonstration du théorème de Bruyno. — Par construction, on a

$$\| B_{\underline{n}^<} \|_{U,V} \leq C^r Q_1^{N(\underline{n}^<)},\ Q_1 > 0,$$

pour une constante C dépendant de U et V, et

$$q(N) \leq Q_2^{N(\underline{n}^<)}, Q_2 > 0.$$

La disparition du $r!$ dans la majoration des opérateurs arborifié est évidente. On devrait s'attendre à la retrouver dans la majoration des moules arborifiés. Mais, et c'est là que joue à fond les symétries, on a :

Lemme V.8. — *Pour toute suite arborescente* $\underline{n}^<$, *on a*

$$| \, Na^{\underline{n}^<} \, | \leq Q_3^{N(\underline{n}^<)}, \; Q_3 > 0. \tag{V.61}$$

La démonstration de cette inégalité n'est pas, contraîrement au cas des comoules $B_{\underline{n}^<}$, une conséquence directe de la méthode d'arborification. Elle résulte du fait que l'équation différentielle satisfaite par le moule $(\mathrm{Na})^{-1}$ s'arborifie, i.e. que l'on a

$$\left[\Delta(\mathrm{Na})^{-1}\right]^{\bullet^<} = I^{\bullet^<} \times (\mathrm{Na}^{-1})^{\bullet^<}. \tag{V.62}$$

La forme du moule $(\mathrm{Na}^{-1})^{\bullet^<}$ est donc la même que celle de Na^{-1} et les estimations classiques sur les petits diviseurs permettent de conclure[22].

La convergence normale de la série arborifiée s'en déduit sans peine.

Remarque V.10. — *À ma connaissance, il n'y a pas de théorème général concernant la méthode d'arborification qui permet de préciser son domaine d'application. Le fait que la méthode restaure la convergence se fait au coup par coup sur les exemples.*

[22] Je ne ferai pas ces calculs ici, qui ne sont pas simplifiés par la méthode d'arborification ou l'utilisation du formalisme des moules. Jean Ecalle souligne qu'il faut utiliser les estimations obtenues par Bruyno ([**3**],p.207-224).

NOTATIONS

Soit $\mathbb{K}$ un anneau. On note :

- $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}\{x\}$ les séries analytiques.

Soit X un alphabet.

- A_X algèbre libre sur X.
- $\mathcal{L}_X$ l'algèbre de Lie libre construite sur X.
- $\mathcal{M}_X$ l'idéal de $\mathbb{K}[[x]]$ formé des séries formelles sans terme constant.
- U$\mathcal{L}_X$ algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_X$.
- X^* l'ensemble des mots construits sur X.
- $X^{*,r}$ l'ensemble des mots de longueur $r \geq 0$.
- $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X)$ l'ensemble des moules sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- sh : application de battage.
- csh : application de battage contractant.
- Δ : coproduit sur $\mathbb{A}$.
- Δ_* : coproduit sur $\mathbb{E}$.

- $M^\bullet$: le moule M.
- $M^{\underline{s}}$: le moule M évalué sur la suite $\underline{s}$.
- $M^{\bullet^<}$: l'arborifié du moule $M^\bullet$.

Références

[1] Bourbaki N., *Groupes et algèbres de lie, Chapitre 2 et 3*, Hermann, Paris, 1972.

[2] Bourbaki N., *Algèbres I, Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.

[3] Brjuno A.D., Analytical form of differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., 25 (1971), p. 131-288.

[4] McConnel J.C., Robson J.C., *Noncommutative noetherian rings*, Pure and applied Mathematics, Wiley -Interscience series, 1987.

[5] Cresson J., Schuman B., Formes normales et problème du centre, Bull. Sci. Math. 125, 3 (2001), p. 235-252.

[6] Cresson J., Obstruction à la linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux, Canad. Math. Bull. Vol. 45 (3), 2002, pp. 355-363.

[7] Dieudonné J., *Eléments d'analyse*, Tome IV, Gauthier-Villars, 1971.

[8] Ecalle J., *Les fonctions résurgentes, Vol.1, Les algèbres de fonctions résurgentes*, Publications Mathématiques d'Orsay, (1981).

[9] Ecalle J., *Les fonctions résurgentes, Vol.3, L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Publications Mathématiques d'Orsay, (1985).

[10] Ecalle J., Singularités non abordables par la géométrie, Ann. Inst. Fourier, 42 (1-2), 1992, 73-164.

[11] Ecalle J., Schlomiuk D., The nilpotent and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms, Ann. Inst. Fourier, 43, 5 (1993), 1407-1483.

[12] Ecalle J., *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Math. Herman, Paris, 1992.

[13] Ecalle J., ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas : un premier bilan, 62.p, Prépublication Mathématiques d'Orsay, à paraître dans le *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 2003.

[14] Ecalle J., A tale of three structures : the arithmectics of multizetas, the analysis of singularities, the Lie algebra ARI, à paraître dans les actes du colloque "*Singularities and Stokes phenomena*", Groningen, 2001.

[15] Ecalle J., Vallet B., Correction an linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms, Math. Z., 229, 249-318, (1998).

[16] Ecalle J, Vallet B, The arborification-coarborification transform : analytic and algebraic aspects, à paraître aux actes du colloque "Résurgence et calcul étranger".

[17] Eisenbud D., *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, 1995.

[18] Eliasson H., Absolutely convergent series expansions for quasi-periodic motions, reports, Department of mathematics, University of Stockholm no.2, 1988.

[19] Jacobson A., *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Math., 10, (1962).

[20] Lafontaine J., *Introduction aux variétés différentielles*, Collection Grenoble Sciences, Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[21] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, 2^d edition, Graduate texts in Math. 5, Springer, 1998.

[22] Martinet J., Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D. Brjuno), Séminaire Bourbaki, no. 564, 1980.

[23] Reutenauer C., *Free lie algebras*, London Math. Soc. Monographs, new series 7, 1993.

[24] Ram A, *Quantum groups : a survey of definitions, motivations and results*, Princeton, 1996.

[25] Serre J-P., *Lie algebras and Lie groups*, W.C. Benjamin Inc, (1965).

[26] Waterhouse W. C., *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Math. 66, Springer, 1979.

[27] Loray F, Analyse des séries divergentes, dans *Quelques aspects des mathématiques actuelles*, ed. Ellipse, A. El Kacimi Alaoui, H. Queffélec, C. Sacré, V. Vassalo, p. 113-173.

[28] Candelpergher B, Nosmas J.C, Pham F., *Approche de la résurgence*, Hermann, Paris, 1993.

[29] Malgrange B, Introduction aux travaux de Jean Ecalle, L'enseignement des mathématiques, 44, p. 41-63, 1985.

[30] Candelpergher B, Une introduction à la résurgence, Gazette des mathématiciens, 42, p. 36-64, 1989.

Jacky Cresson • *E-mail :* `cresson@math.univ-fcomte.fr`, Equipe de Mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623,, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France.